ALICJA KASZUBA-CYBURA
Instytut Ekonomiki Rolnej
Warszawa

W SPRAWIE KONKURENCJI MIĘDZY ZIEMIOPŁODAMI

Gospodarstwo rolne wchodzi w każdorazowy cykl produkcji roślinnej z określoną powierzchnią uprawną i określonym a priori potencjałem siły roboczej.

Aby zrealizować główny cel swej działalności produkcyjnej, tzn. osiągnąć dochód maksymalny, gospodarstwo musi określić kierunki produkcji, a więc dokonać wyboru między innymi takiego zestawu ziemiopłodów, który zapewni mu maksymalny dochód w warunkach aktualnego układu relacji cen.

Zachodzi pytanie — jak wiele ziemiopłodów może wchodzić w skład takiego zestawu? Czy istnieją przesłanki pozwalające wnosić o liczebności zestawu ziemiopłodów branych pod rozwagę?

Pierwsza eliminacja ziemiopłodów następuje nieuchronnie z racji wymogów glebowych. Dalsza eliminacja następuje z punktu widzenia zapotrzebowania na siłę roboczą, zwłaszcza dla tych etapów cyklu produkcji, które cechuje sezonowe spiętrzenie prac.

Jak wiadomo [1, 2], między poszczególnymi produktami istnieją zależności nie tylko typu komplementarnego, konkurencyjnego, lecz i sprzężonego i suplementarnego. Nawet jeśli przyjąć, że granice między tymi typami powiązań mogą nie być sztywne i np. w określonych warunkach zależności typu konkurencyjnego mogą przechodzić w zależności komplementarne i odwrotnie[3], sam fakt istnienia różnych typów zależności stwarza przesłankę do wnoszenia, iż z tej racji liczebność zestawu ziemiopłodów może ulec ograniczeniu.

Zatem niewątpliwy wydaje się pogląd, że liczba ziemiopłodów wchodzących w skład wybranej kombinacji będzie znacznie ograniczona.

Można jednak postawić pytanie dalej idące: jaka jest dolna granica liczby upraw, które należy wziąć do produkcji by zapewnić gospodarstwu dochód maksymalny? Pytanie to jest równoważne z pytaniem: **jak wiele ziemiopłodów konkuruje ze sobą o czynniki produkcji, jeśli za kryterium oceny przyjąć wielkość masy dochodu jaką dają one w określonej kombinacji?**

---

[1] M. Pohorille: Wstęp do teorii regulowania cen rolnych. Warszawa 1960 PWN s. 270 i dalsze.

[2] A. Brzoza: Zarys rachunku ekonomicznego w gospodarstwie rolnym. Warszawa, 1961, skrypt SGPiS, s. 122—123.

[3] A. Brzoza, tamże, s. 123.

W aktualnej literaturze ekonomiczno-rolnej można spotkać werbalne twierdzenia, że w rolnictwie w zakresie produkcji roślinnej konkurencja między produktami w ostatecznym rozrachunku sprowadza się do dwóch produktów[1].

Czy możliwe jest zweryfikowanie tego twierdzenia na drodze rozważań matematycznych?

W naszej literaturze ekonomicznej można odnotować fakt istnienia dyskusji, która stanowi punkt wyjścia przy próbach rozwiązania tego problemu.

W jednej ze swoich prac[2] M. Pohorille rozpatruje problem osiągnięcia maksymalnego dochodu w przypadku gdy przedsiębiorstwo rolne ma do wyboru tylko dwie uprawy roślinne. Problem zostaje uwieńczony pomyślnym rozstrzygnięciem tzn. przedsiębiorstwo może zapewnić sobie dochód maksymalny w przypadku istnienia dwóch upraw (przy wprowadzeniu do rozważań dwóch warunków ograniczających produkcję, a mianowicie czynnik ziemi i czynnik siły roboczej).

Badania tego problemu rozszerzył Z. Galas[3]. Rozważania Z. Galasa sprowadzają się do rozważania problemu postawionego przez M. Pohorille w przypadku większej liczby upraw.

Autor drogą rozważań matematycznych, dowodzi, że w przypadku n upraw gospodarstwo nie ma przymusu uprawiania więcej niż 2 kultur. Oznacza to, że przedsiębiorstwo rolne może zapewnić sobie dochód maksymalny wybierając odpowiednio tylko dwie uprawy.

Ważnym końcowym stwierdzeniem autora jest, że w jego przekonaniu — liczba upraw wybranych do produkcji musiałaby ulec zwiększeniu w przypadku zwiększenia liczby założeń ograniczających.

Wniosek ten byłby bezspornie słuszny tylko w przypadku, gdyby z trzeciego warunku ograniczającego wynikała konieczność fizycznej obecności jednej lub więcej upraw w gospodarstwie. Innymi słowy, trzeci warunek ograniczający musiałby być podyktowany np. wymogami płodozmianu lub limitami dostaw obowiązkowych.

W przypadku naszych rozważań — dotyczących problemu konkurencyjności, wprowadzenie trzeciego warunku ograniczającego o charakterze techniczno-zewnętrznym, minęłoby się z celem. Przedmiotem konkurencyjności między ziemiopłodami są czynniki produkcji (ziemia, praca i kapitał), zatem przy rozważaniu problemu konkurencyjności, warunki

---

[1] „Konkurencja między wszystkimi ziemiopłodami o wykorzystanie powierzchni uprawnej daje się sprowadzić do konkurencji każdorazowych dwóch upraw. Gdy chodzi o obsianie pewnej orkeślonej powierzchni uprawnej, wiele różnorodnych możliwości można zawsze zredukować do dwóch i ostatecznie pozostaje tylko alternatywa między dwiema uprawami. Jeśli dla wykorzystania jednego hektara powierzchni mamy do wyboru trzy uprawy, np. pszenicę, ziemniaki i buraki cukrowe, to problem konkurencji między trzema uprawami daje się rozwiązać w:

1) konkurencji między pszenicą i ziemniakami,
2) konkurencji między pszenicą i burakiem cukrowym,
3) konkurencji między burakiem cukrowym i ziemniakami".

G. Weinschenck: Zur Theorie und Praxis der Kalkulation in Landwirtschaftlichen Betrieb, Berichte über die Landwirtschaft Band XXX, 1956, Heft 4, Seite 565.

[2] M. Pohorille: Zagadnienia badań nad opłacalnością produkcji w spółdzielniach produkcyjnych. Ekonomista nr 4/1956.

[3] Z. Galas: Zagadnienie maksymalnego dochodu w gospodarstwie rolnym. Przegląd Statystyczny, zeszyt 3—4 r. 1957.

ograniczające produkcję roślinną muszą dotyczyć czynników produkcji i zawierać je w sobie treściowo.

A więc możliwe jest wprowadzenie tylko trzech zasadniczych warunków ograniczających. Pierwszy dotyczy powierzchni uprawnej jaką dysponuje gospodarstwo, drugi — potencjału siły roboczej, trzeci — nakładów materiałowo-pieniężnych.

Ale włączenie trzeciego warunku ograniczającego, o charakterze wewnątrz-ekonomicznym, czyni wniosek postawiony przez Z. Golasa dyskusyjnym i wymagającym weryfikacji.

Zatem interesujący nas problem można postawić następująco:

Ile upraw musi produkować przedsiębiorstwo rolne by zapewnić sobie maksymalny dochód, jeśli dysponuje ograniczoną ilością ziemi, siły roboczej i kapitału?

Czy można udowodnić twierdzenie, że gospodarstwo może zapewnić sobie dochód maksymalny biorąc do produkcji tylko dwie uprawy, przy nałożeniu na produkcję 3 warunków ograniczających?

Już z samego problemu wynika, że rozważania dotyczyć będą gospodarstwa modelowego, co jednak nie oznacza, że miałoby ono być zupełnie pozbawione waloru realności. Z postawionego pytania wynika główny cel gospodarowania, mianowicie osiągnięcie maksymalnego dochodu. Cele uboczne, o mniejszym ciężarze gatunkowym ale niezbędne do osiągnięcia w toku gospodarowania, nie interesują nas w naszych rozważaniach. Zatem, mimo że w konkretnej rzeczywistości nie znajdziemy gospodarstwa, które by w swej działalności kierowało się wyłącznie celem głównym, mimo że nie znajdziemy w naszym rolnictwie gospodarstwa, które by mogło, aż tak wąsko się specjalizować by nastawiać się na uprawę tylko dwóch kultur, lub w ogóle być gospodarstwem typu monokulturowego, to jednak by rozwiązać interesujący nas problem musimy uciec się do takiego modelowego, maksymalnie oczyszczonego z czynników ubocznych rozważania.

Tego typu postępowanie badawcze jest ogólnie przyjętą i stosowaną metodą.

Zapiszmy problem matematycznie:

Dane są do wyboru 2 uprawy U_1 i U_2
Dochodowość uprawy U_1 i U_2 odpowiednio wynoszą: d_1, d_2
Pracochłonność uprawy U_1 i U_2 odpowiednio wynoszą: p_1, p_2
Kapitałochłonność uprawy U_1 i U_2 odpowiednio wynoszą: s_1, s_2

Względem tak usymbolizowanych wielkości wyjściowych musimy uczynić następne założenia:

1) dochodowości obu upraw, tzn. d_1 i d_2 są każda dla siebie stałe, lecz względem siebie mogą być różne, tzn. przyjmujemy, że dochodowość z 1 ha dla uprawy U_1 jest wielkością stałą. To samo dotyczy uprawy U_2;

2) pracochłonności obu upraw różnią się między sobą, tzn. $p_1 \neq p_2$, lecz nakłady robocizny na 1 ha dla uprawy U_1 są stałe. To samo dotyczy uprawy U_2;

3) $s_1 \neq s_2$, lecz nakłady materiałowo-pieniężne na 1 ha dla uprawy U_1 są stałe. To samo dotyczy uprawy U_2.

Przyjęcie takich założeń jest niezbędne, jeśli chcemy w dalszych rozważaniach funkcję dochodu traktować jako liniową.

Oznaczmy ogólny obszar obsiewów w gospodarstwie przez H ha; zasób siły roboczej w gospodarstwie w roboczodniach przez R rob/dni; zasoby gotówkowe na zakup nawozów przez S zł (w naszym rachunku sumy przeznaczone na nawozy sztuczne obraliśmy za reprezentanta kapitału).

Operując powyższymi oznaczeniami dokonujemy zapisu funkcji dochodu:

$$\text{I} \qquad y = \sum_{k=1}^{2} d_k x_k$$

Zapisy dla kolejnych warunków ograniczających są następujące:

1. $\Sigma x_k \leqslant H$ — warunek ograniczający powierzchnię uprawy
2. $\Sigma p_k x_k \leqslant R$ — warunek ograniczający siłę roboczą
3. $\Sigma s_k x_k \leqslant S$ — warunek ograniczający kwotę kapitału
4. $x_1 > 0, \; x_2 > 0$ — zapisy stwierdzające oczywistość faktu, że żadne x_k nie może być ujemne

Funkcja dochodu przy uczynionych wyżej założeniach ma postać liniową (jest to funkcja liniowa, jednorodna).

Warunki 1, 2 i 3 orzekają, że gospodarstwo nie może pod obie uprawy przeznaczyć więcej jak H hektarów, więcej jak R roboczodniówek i więcej jak S złotych na zakup nawozów.

Powyższy układ nierówności przekształćmy w równoważny mu układ równań:

1. $\Sigma x_k = H$
2. $\Sigma p_k x_k = R$
3. $\Sigma s_k x_k = S$

Nadajemy temu syntetycznemu zapisowi postać rozwiniętą:

1. $x_1 + x_2 = H$
2. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$
3. $s_1 x_1 + s_2 x_2 = S$

Warunki 1 i 4 zakreślają na płaszczyźnie obszar q_1 będący trójkątem równoramiennym. Warunki 2 i 4 zakreślają obszar q_2. Warunki 1 i 2 zakreślają na płaszczyźnie obszar q_3. Warunki 3 i 4 zakreślają na płaszczyźnie obszar q_2'; warunki 1 i 3 — q_3'.

Obszarem istnienia funkcji dochodu może być również jakiś obszar Q powstały z odpowiedniego nakładania się na siebie trójkątów: q_1, q_2, q_3 oraz trójkątów q_2' i q_3'.

Obszary istnienia funkcji dochodu dla obu czynników produkcji łącznie mogą przyjąć kształt czworokąta i pięciokąta.

Rozważmy obecnie wszystkie możliwe przypadki kształtowania się tych obszarów. Przede wszystkim rozważmy możliwość ukształtowania się jakiegoś obszaru Q_3 powstałego z nałożenia się na siebie czworokątów q_3 i q_3'.

Jaka jest interpretacja geometryczna tych obszarów. Obszar q_1 jest obszarem wspólnym dla obu czynników produkcji i wyraża on sytuację, gdy zarówno czynnik pracy jak i kapitału pozostają w nadmiarze dla każdej z upraw, tzn. gdy czynnikiem ograniczającym jest tylko powierzchnia. Obszary q_2 i q_2' wyrażają tę sytuację, gdy zarówno czynnik kapitału jak i pracy znajdują się w niedoborze dla każdej z upraw. Obszary q_3 i q_3' powstały z nałożenia na siebie obszarów q_1 i q_2 oraz q_1 i q_2'.

Sytuację odpowiadającą obszarom q_3 i q_3' można wyrazić odpowiednimi zapisami:

dla q_3: $H_2 > H > H_1$ — zapis wyrażający nadmiar siły roboczej dla uprawy U_2 i niedobór dla uprawy U_1

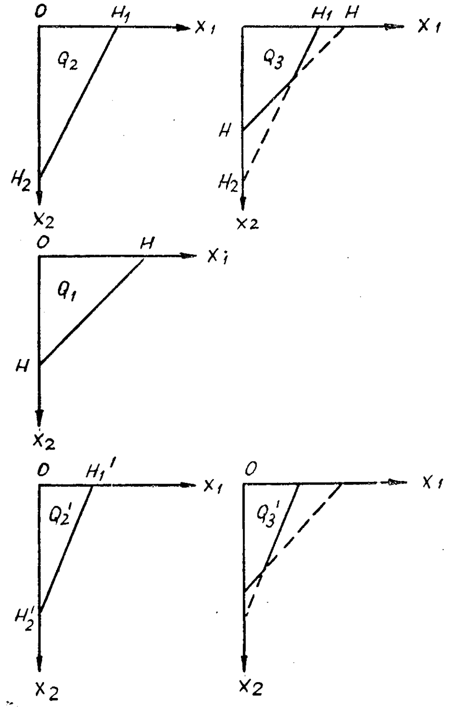
dla q_3': $H_2' > H > H_1'$ — zapis wyrażający nadmiar kapitału dla uprawy U_2 i niedobór dla uprawy U_1

przy tym $H_2 = \frac{R}{p_2}$ — jest to działka ziemi wyznaczona do uprawy U_2 przez potencjał siły roboczej

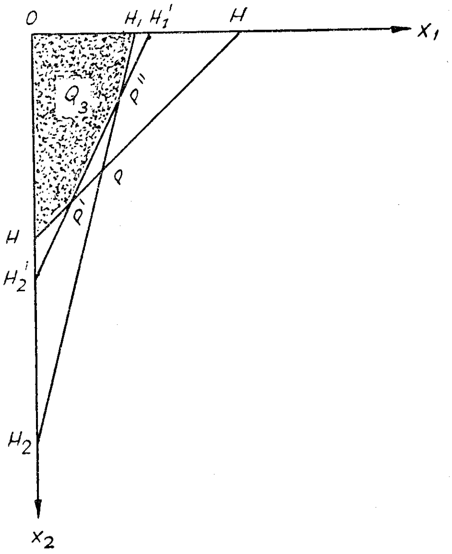
$H_1 = \frac{R}{p_1}$ — działka ziemi wyznaczona przez potencjał siły roboczej dla uprawy U_1

$H_2' = \frac{S}{s_1}$ — działka ziemi wyznaczona przez potencjał kapitału dla uprawy U_2

$H_1' = \frac{S}{s_2}$ — działka ziemi wyznaczona przez potencjał kapitału dla uprawy U_1



Rys. 1



Rys. 2

Zanim przystąpimy do dalszych rozważań zróbmy zastrzeżenie, że właściwie z punktu widzenia realnej rzeczywistości rozważanie na temat obszarów q_3 i q_3' jest zawieszone w powietrzu, bowiem opiera się ono na założeniu, że bilans pracy w gospodarstwach rolnych jest w każdym momencie wyrównany, podczas gdy w rzeczywistości jest to bilans napięty, zwłaszcza w momentach spiętrzenia prac polowych. Ponieważ jednak teoretycznie takie sytuacje są możliwe, zatem przeprowadzamy takie rozważania.

Z obu nie równości 1. $H_2 > H > H_1$
2. $H_2' > H > H_1'$

wynika, że uprawa U_2 jest jednocześnie mniej pracochłonna i mniej kapitałochłonna. Zapiszmy obie nierówności nieco inaczej:

1. $H_1 < H > H'_1$
2. $H_2 > H < H'_2$

a stanie się bardziej widoczne, że mamy do czynienia z nadmiarem czynnika pracy i kapitału względem uprawy U_2 i z ich niedoborem względem uprawy U_1.

Jeśli jeszcze zrobimy założenie, że $H_2 > H_2'$ *i* $H_1 < H_1'$, to wtedy z nałożenia na siebie obszarów q_3 i q_3' może teoretycznie powstać obszar Q_3 taki jak np. na rysunku 2.

Prosta HH jest wykresem funkcji dochodu dla 1 warunku ograniczającego. Prosta H_2H_1 jest wykresem funkcji dochodu dla 2 warunku ograniczającego. Prosta $H_2'H_1'$ jest wykresem funkcji dochodu dla 3 warunku ograniczającego. Zatem może powstać sytuacja, gdy przy podanych założeniach obszar istnienia funkcji dochodu okaże się pięciokątem.

Zauważmy, że funkcja dochodu: $y = d_1x_1 + d_2x_2$ jako funkcja liniowa — może osiągać swoje wartości maksymalne tylko na obwodzie pięciokąta Q_3.

Zauważmy też, że obwód obszaru Q_3 jest zakreślony trzema warunkami ograniczającymi, które w tym przypadku ułożyły się w następującej kolejności:

dla boku H_p' który jest fragmentem prostej HH mamy równanie: :

$$x_1 + x_2 = H$$

dla boku $H_2'p''$, który jest fragmentem prostej $H_2'H_1'$ mamy równanie:

$$s_1x_1 + s_2x_2 = S$$

dla boku $p'H_1$, który jest fragmentem prostej H_2H_1 mamy równanie:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R$$

Rozpatrzmy teraz jakie wartości może przybierać funkcja dochodu na obwodzie obszaru Q_3. W tym celu dokonujemy odpowiednich przekształceń w układzie równań:

1. $x_1 + x_2 = H$
2. $s_1x_1 + s_2x_2 = S$
3. $p_1x_1 + p_2x_2 = R$

Przekształcenia tego dokonujemy w ten sposób, że np. dla boku, którego równanie jest $x_1 + x_2 = H$, znajdujemy x_2 i wstawiamy w funkcję dochodu:

$$x_2 = H - x_1$$
$$y = d_1x_1 + d_2x_2$$
$$y = d_1x_1 + d_2(H - x_1)$$
$$y = d_1x_1 + d_2H - d_2x_1 = (d_1 - d_2)\, x_1 + d_2H$$

Postępując analogicznie względem dwóch pozostałych boków naszego pięciokąta, otrzymujemy następujące równania funkcji dochodu:

1. $$y = (d_1 - d_2)\, x_1 + d_2\, H$$

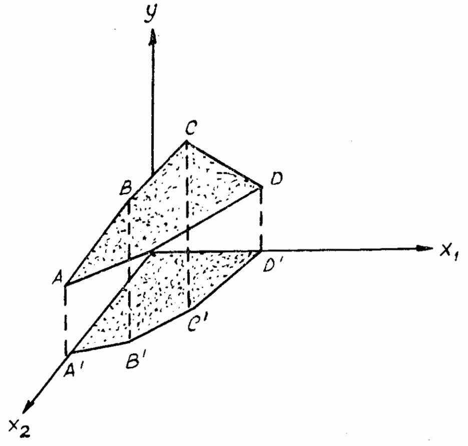
2. $$y = \left(d_1 - d_2\, \frac{H_2'}{H_1'}\right) x_1 + d_2\, H_2'$$

3. $$y = \left(d_1 - d_2\, \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2\, H_2$$

Zauważmy, że każde z równań funkcji dochodu ma postać liniową. Współczynnikiem kierunkowym np. w równaniu 1 jest $(d_1 - d_2)$, wielkością zaś stałą d_2H.

Zauważmy też, że pięciokąt Q_3 przedstawiony na rysunku 2 jest tylko rzutem funkcji dochodu, która jest równaniem płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej. Płaszczyzna ta przecina graniastosłup prosty o podstawie będącej wielokątem Q_3.

Przykładowo funkcja dochodu w pełnym przestrzennym kształcie może wyglądać jak na rysunku 3.



Rys. 3

Jakie wartości może przybierać funkcja dochodu na trzech bokach ograniczających jej obszar istnienia?

$$\text{gdy } d_1 = d_2$$

Wynik analizy

Równania funkcji dochodu na 3 bokach pięciokąta Q_3	$d_1 = d_2$	$d_2 > d_1$	$d_1 > d_2$		
			$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$	
				$d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$
	1	2	3	4	5
1. $y = (d_1 - d_2)\, x_1 + d_2 H$	stała	malej.	rosnąca	rosnąca	rosnąca
2. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2'}{H_1'}\right) x_1 + d_2 H_2'$	malej.	malej.	rosnąca	stała	rosnąca
3. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2$	malej.	malej.	stała	malejąca	malejąca

to sprawa wygląda prosto, mianowicie należy wziąć do produkcji uprawę U_2, gdyż masa dochodu okaże się tu większa;

$$\text{gdy } d_2 > d_1$$

tzn. uprawa mniej pracokapitałochłonna jest bardziej dochodowa, to również należy całą powierzchnię przeznaczyć pod uprawę U_2;

$$\text{gdy } d_1 > d_2$$

to możliwe są następujące przypadki dla boków wyrażonych równaniem 2 i 3:

1. $d_2 < d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$

   $d_2 < d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$

   $d_2 < d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$

2. $d_2 < d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$

   $d_2 < d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$

   $d_2 < d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$

Wszystkie możliwe przypadki zilustrowane są w tabeli 1.

Co wynika z analizy wartości funkcji dochodu pokazanej w tabeli 1? Przede wszystkim zauważmy, że:

1) kolumna 10 jest mechanicznym powtórzeniem kolumny 3
2) ,, 8 ,, ,, ,, ,, 4
3) ,, 12 ,, ,, ,, ,, 5
4) ,, 9 ,, ,, ,, ,, 6
5) ,, 11 ,, ,, ,, ,, 7

Tabela 1

funkcji dochodu

	$d_1 > d_2$					
				$d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$		
$d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$
6	7	8	9	10	11	12
rosnąca	rosnąca	rosnąca	rosnąca	rosnąca	rosnąca	rosn.
malejąca	rosnąca	stała	malejąca	rosnąca	rosnąca	rosn.
malejąca	rosnąca	malejąca	malejąca	stała	rosnąca	malej.

A zatem tabela 1 bez uszczerbku dla całości analizy mogłaby składać się tylko z 7 kolumn, wyczerpujących wszystkie możliwości. Ukazując tę tabelę w jej pełnej rozwiniętej postaci kierowano się przesłanką mającą na celu umożliwienie śledzenia całego rozważania.

Z tabeli wynika, że tylko 2 możliwości, pokazane w kolumnach 5 i 6 — wnoszą przymus jednoczesnego zastosowania dwóch upraw celem osiągnięcia maksymalnego dochodu. Sytuacji ukazanej w kolumnie 5 odpowiada na rysunku 2 punkt p'', w którym przecinają się bloki pięciokąta Q_3. Są to boki:

$$2. \qquad s_1x_1 + s_2x_2 = S$$

$$3. \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = R$$

W punkcie p'' funkcja dochodu osiąga najwyższą wartość, bowiem do tego punktu funkcja przybiera wartości rosnące, a począwszy od niego wartości malejące. Zatem współrzędne punktu p'' będą wyznaczały działki uprawy U_1 i U_2, które należy wziąć pod uprawę, by zapewnić sobie największą masę dochodu. Współrzędne tego punktu można znaleźć rozwiązując powyższy układ równań. Współrzędne te są:

$$X_1 = \frac{(H_1 - H_1')(H_2H_1')}{H_2'H_1 - H_1'H_2} \qquad X_2 = \frac{(H_1 - H_1')(H_2H_2')}{H_2'H_1 - H_1'H_2}$$

W tej sytuacji ma miejsce pełne wykorzystanie siły roboczej i kapitału. Natomiast część powierzchni pozostanie niewykorzystana. Natomiast sytuacji odpowiadającej kolumnie 6 odpowiada na rysunku 2 punkt p', który jest punktem przecięcia boków:

$$1. \qquad y = (d_1 - d_2)\, x_1 + d_2H$$

$$2. \qquad y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2'}{H_1'}\right) x_1 + d_2H_2'$$

w punkcie p' funkcja dochodu osiąga swoją maksymalną wartość. Zatem współrzędne tego punktu określają wielkości działek obu upraw jakie należy wziąć do produkcji, by zapewnić osiągnięcie maksymalnego dochodu. Współrzędne te obliczone z równań 1 i 2 są:

$$X_1 = H_1' \frac{(H - H_2')}{H_1' - H_2'} \qquad X_2 = H_2' \frac{(H_1' - H)}{H_1'' - H_2'}$$

W tym przypadku gospodarstwo wykorzystuje w pełni powierzchnię i kapitał, natomiast część siły roboczej pozostanie niewykorzystana.

W dalszym ciągu rozważań nad przypadkiem gdy $d_1 > d_2$, należy zająć się analizą wartości funkcji dochodu zilustrowaną przez kolumnę 3. Funkcja dochodu przybiera na dwóch pierwszych bokach obszaru Q_3 wartości rosnące względem zmiennej X_1, następnie stabilizuje swoją wartość na najwyższym osiągniętym poziomie na boku trzecim. Zatem najwyższe wartości może osiągać na boku p'' H_1, począwszy od punktu p''. A zatem należy w tym przypadku całą siłę roboczą i cały kapitał skierować na uprawę U_2 lub też podzielić kapitał i siłę roboczą na obie uprawy. Wybór uprawy U_2 będzie lepszym rozwiązaniem, ponieważ pozwala na wykorzystanie wszystkich czynników produkcji, podczas gdy kombinacja obu upraw nie pozwoli na pełne wykorzystanie powierzchni, której część trzeba będzie pozostawić odłogiem.

W kolumnie 4 obserwujemy, że funkcja przybiera na 3 bokach kolejno wartość: rosnącą, stałą, malejącą. Zatem możliwie największe wartości osiąga na boku $p'p''$, który jest fragmentem prostej $H_2'H_1'$. Mamy więc trzy możliwości do wyboru:

1) kombinację obu upraw wg współrzędnych punktu p' będącym punktem przecięcia boku 1 i 2, które reprezentują warunki ograniczające powierzchnię i kapitał; w tym przypadku gospodarstwo zapewni sobie pełne wykorzystanie powierzchni i kapitału, natomiast nie wykorzysta potencjału pracy;

2) kombinację obu upraw wg współrzędnych punktu p'', który leży na przecięciu boków 2 i 3; w tym przypadku gospodarstwo nie wykorzysta powierzchni w pełni, wykorzystując natomiast pozostałe czynniki produkcji.

W obu kombinacjach gospodarstwo osiągnie tę samą i najwyższą masę dochodu.

3) Teoretycznie można też całą powierzchnię i pozostałe środki produkcji skierować pod uprawę U_2. Bowiem równanie funkcji dochodu na boku $p'p''$ jest:

$$y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2'}{H_1'}\right) x_1 + d_2 H_2'$$

Ponieważ funkcja na tym boku przybiera wartości stałe i możliwie największe, zatem maksymalne wartości funkcji na tym boku wynoszą d_2H_2'. Praktycznie jednak nie ma możliwości zrealizowania dochodu maksymalnego na powierzchni równej H_2' ha, gdyż w założeniu przyjęta, że $H_2' > H$. Zatem brak powierzchni na zrealizowanie tej możliwości. A więc jest tylko możliwość kombinowania obu upraw w dowolnych punktach boku $p'p''$ (wg kolejnych współrzędnych).

Sytuacja ukazana w kolumnie 7 jest jednoznaczna, mianowicie funkcja dochodu na wszystkich bokach obszaru Q_3 przyjmuje wartości rosnące względem zmiennej x_1, zatem wszystkie czynniki produkcji należy skierować pod uprawę U_1. Dochód maksymalny zostanie osiągnięty przy niepełnym wykorzystaniu powierzchni i kapitału, natomiast w pełni zostanie wykorzystana siła robocza.

Wnioski te wynikają z założeń wyjściowych:

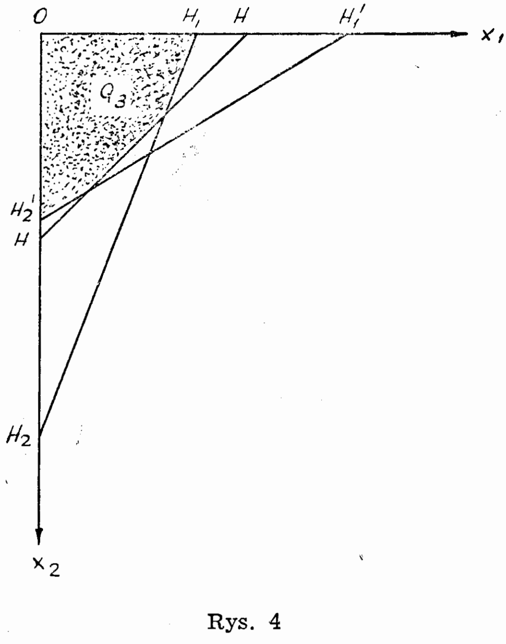
$$H_1 < H$$
$$H_1 < H_1'$$

Zauważmy, że nawet przy postawionych na początku rozważań założeniach obszar Q_3 nie musi być zawsze pięciokątem. Gdy prostą $H_2'H_1'$ przesuwać równolegle aż do punktu P — to obszar Q_3 staje się czworokątem wyznaczonym przez dwa warunki ograniczające powierzchnię i czynnik pracy. Zatem tylko dla pewnych H_2' i H_1' — obszar Q_3 będzie taki jak na rysunku 2.

Zastanówmy się teraz jaki będzie przebieg rozważań, gdy nałożenie się na siebie czworokątów q_3 i q_3' nastąpi przy zaistnieniu innych założeń, a mianowicie:

1. $H_2 > H > H_1$
2. $H_2' < H < H_1'$

to znaczy przy założeniu, że uprawa mniej pracochłonna jest bardziej kapitałochłonna. Przykładowo obszar powstały z nałożenia się na siebie czworokątów q_3 i q_3' może wyglądać jak na rysunku 4.



Rys. 4

Jak wynika z rysunku 4 może nim być pewien pięciokąt o bokach:

1) $H_2'p'$ którego równanie jest

$$S_1X_1 + S_2X_2 = S$$

2) $p'p''$ którego równanie jest

$$X_1 + X_2 = H$$

3) $p''H_1$ którego równanie jest

$$p_1X_1 + p_2X_2 = R$$

Zauważmy, że w konsekwencji odmiennych założeń nasz nowy pięciokąt Q_3 różni się zasadniczo od pięciokąta Q_3 pokazanego na rysunku 2. Mianowicie kolejność boków ograniczających obszar istnienia funkcji jest odmienna. Jakie wartości może przybierać funkcja dochodu w pięciokącie Q_3?

Równania funkcji dochodu w nowym pięciokącie Q_3 są następujące:

$$1. \quad Y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2'}{H_1'} \right) \cdot X_1 + d_2H_2'$$

$$2. \quad Y = (d_1 - d_2)\, X_1 + d_2H$$

$$3. \quad Y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1} \right) \cdot X_1 + d_2H_2$$

Zauważmy, że w tych równaniach $\frac{H_1}{H_2} > 1$, ale $\frac{H_2'}{H_1'} < 1$, co wynika z założeń przyjętych w nierównościach 1 i 2. Wynik analizy wartości funkcji dochodu w obszarze Q_3 przedstawia tabela 2.

Jakie wnioski wynikają z analizy wartości osiąganych przez funkcję dochodu na poszczególnych bokach pięciokąta Q_3? Nie będziemy przeprowadzać szczegółowego omówienia każdego z 7 przypadków przebiegu wartości funkcji, bowiem dla nas interesujący jest tylko fakt, czy istniejące alternatywy upraw wystarczą nam dla osiągnięcia dochodu maksymalnego. W tym względzie tabela 2 informuje, że tylko w trzech przypadkach, widocznych w kolumnach 1, 3 i 7 obowiązywałby gospodarstwo przymus zastosowania w produkcji 2 upraw dla osiągnięcia maksymalnego dochodu. W pozostałych przypadkach wystarczająca okazuje się uprawa jednego z ziemiopłodów. Godny omówienia w tabeli 2 wydaje się być przypadek ukazany w kolumnie 1, tzn. odpowiadający założeniom $d_1 = d_2$. Funkcja dochodu przybiera wtedy wartości następujące: na boku H_2p' — rosnące, na boku $p'p''$ — stałe i na boku $p''H_1$ — malejące. Zatem mamy tu następujące alternatywy mogące zapewnić dochód maksymalny:

1) Kombinacja obu upraw wg współrzędnych punktu p', wtedy osiąga się dochód maksymalny przy pełnym wykorzystaniu powierzchni i kapitału z jednoczesnym pozostawieniem rezerw siły roboczej.

2) Kombinacja obu upraw wg współrzędnych punktu p'', przy czym osiągnięciu dochodu maksymalnego towarzyszy pełne wykorzystanie powierzchni i siły roboczej przy jednoczesnym niewykorzystaniu kapitału.

Natomiast nie ma możliwości zrealizowania dochodu maksymalnego względem jednej uprawy, tzn. uprawy U_2. Bowiem funkcja tego boku jest:

$$y = (d_1 - d_2)\, x_1 + d_2 H$$

Ponieważ jest to funkcja stała ($d_1 = d_2$), zatem osiąga ona stałe i możliwie największe wartości na całym boku $p'p''$. Są one równe:

$$Y = d_2 H$$

Jednak wartość ta nie jest możliwa do zrealizowania, gdyż zgodnie z założeniem wyjściowym $H > H_2'$ — gospodarstwo nie dysponuje kapitałem niezbędnym do zrealizowania dochodu maksymalnego na całej powierzchni, a więc:

3) można realizować dochód maksymalny w każdym punkcie boku $p'p''$ kombinując obie uprawy wg współrzędnych kolejnych punktów na boku $p'p''$.

Tu również należy uczynić spostrzeżenie, że obszar Q_3 przy istniejących założeniach w niewielkiej ilości przypadków przybiera kształt pięciokąta. Jeśli prostą określoną równaniem $X_1 + X_2 = H$ przesuwać równolegle aż do punktu P, obszar istnienia funkcji dochodu przybierze kształt czworokąta. Innymi słowy, praktycznie rzecz biorąc, najczęściej obszar Q_3 będzie czworokątem, wyznaczonym przez dwa warunki ograniczające i mieszczącym się całkowicie w obszarze wyznaczonym przez pozostały warunek ograniczający, tj. przez powierzchnię. Wtedy w tworzeniu się obszaru Q_3 wezmą udział tylko 2 warunki ograniczające, mianowicie potencjał siły roboczej i potencjał kapitału. Z tabeli 2 zupełnie wypadnie wiersz 2.

Zajmijmy się teraz kwestią maksymalizacji dochodu w przypadkach bardziej adekwatnych do rzeczywistości, a mianowicie w sytuacji, gdy oba czynniki produkcji cechuje niedobór. Następujący układ nierówności odzwierciedlałby interesującą nas sytuację w gospodarstwie rolnym:

$$1.\ H_2 < H > H_1$$
$$2.\ H_2' < H > H_1'$$

Możliwe są trzy przypadki rozważań:

$$1.\ H_2 > H_2' \quad \text{i} \quad H_1 > H_1'$$

Wtedy o kształcie obszaru Q decyduje tylko 2 warunek ograniczający. Obszarem istnienia funkcji jest wtedy trójkąt q_2.

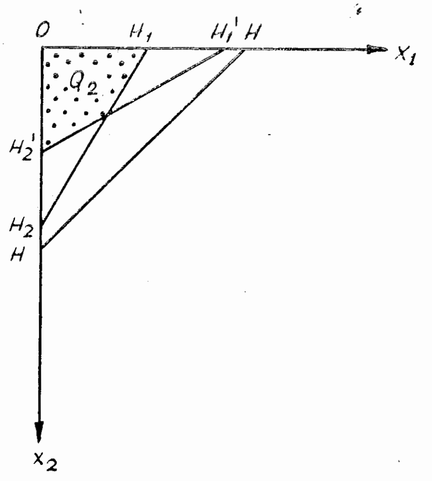
$$2.\ H_2' > H_2 \quad \text{i} \quad H_1' > H_1$$

Wtedy obszarem istnienia funkcji dochodu jest trójkąt q_2'.

$$3.\ \text{gdy np.: } H_2 > H'_2 \quad \text{ale} \quad H_1 < H_1'$$

Wtedy obszarem istnienia funkcji będzie jakiś czworokąt Q_2 powstały z nałożenia na siebie trójkątów q_2 i q_2', taki np. jak na rys. 5.

Oczywiście jest to jedyny interesujący nas przypadek z owych 3. Jakie wartości może przybierać funkcja dochodu na obu bokach czworokąta?



Rys. 5

Będziemy rozpatrywali jej przebieg na dwóch równaniach funkcji dochodu:

$$1. \qquad y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2'$$

$$2. \qquad y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2$$

Rozpatrując wartość funkcji dochodu na obu bokach, musimy pamiętać, że z układu nierówności:

$$H_2 < H > H_1$$
$$H_2' < H > H_1'$$

nic nam nie wiadomo o stosunkach między H_2 i H_1 oraz H_2' i H_1', a właśnie te stosunki biorą udział w kształtowaniu tej funkcji.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy:

$$H_2 > H_1$$
$$H_2' < H_1'$$

Stąd też wynika, że $\frac{H_2}{H_1} > \frac{H_2'}{H_1'}$, a zatem $d_2 \frac{H_2}{H_1} > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$

Tabela 3 ilustruje nam wyniki analizy wartości funkcji dochodu i informuje, że przymus wprowadzenia do produkcji obu upraw ma miejsce aż w trzech sytuacjach, o czym mówią kolumny 1, 4 i 6.

Tabela 2

Wynik analizy funkcji dochodu

Równania funkcji dochodu na 3 bokach pięciokąta Q_3	$d_1 = d_2$	$d_2 > d_1$			$d_1 > d_2$		
		$d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$
	1	2	3	4	5	6	7
1. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2'}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2'$	rosnąca	stała	rosnąca	malejąca	rosnąca	rosnąca	rosnąca
2. $y = (d_1 - d_2) x_1 + d_2 H$	stała	malejąca	malejąca	malejąca	rosnąca	rosnąca	rosnąca
3. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_1 H_2$	malejąca	malejąca	malejąca	malejąca	stała	rosnąca	malejąca

Tabela 3

Wynik analizy funkcji dochodu

Równania funkcji dochodu	$d_1 = d_2$	$d_1 > d_2$			$d_2 > d_1$		
		$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$
	1	2	3	4	5	6	7
1. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2'$	rosnąca	rosnąca	rosnąca	rosnąca	stała	rosnąca	malejąca
2. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2$	malejąca	stała	rosnąca	malejąca	malejąca	malejąca	malejąca

W tych sytuacjach gospodarstwo musi wziąć do produkcji obie uprawy, przeznaczając na nie działki ziemi wg współrzędnych punktu p. Z punktu widzenia algebraicznego, współrzędne te są analogiczne do tych jakie rozpatrywano w przypadku pięciokąta Q_3 (z rys. 3) w odniesieniu do punktu p''.

Kombinując obie uprawy gospodarstwo zapewnia sobie osiągnięcie dochodu maksymalnego, przy pełnym wykorzystaniu siły roboczej i kapitału.

Dla wszystkich sytuacji ukazanych w tabeli 3 właściwy jest brak wykorzystania dyspozycyjnej powierzchni, co jest konsekwencją założeń.

Z analizy kolumny 2 wynika, że funkcja dochodu osiąga stałe i najwyższe wartości na boku $p\,H_1$ i wartości te są równe $d_2 H_2$. Ale ponieważ nie ma możliwości zrealizowania tej wartości dochodu na obszarze równym H_2 (dość siły roboczej, za mało kapitału, gdyż $H_2 > H_2'$), zatem praktycznie pozostaje do wykorzystania kombinacja obu upraw.

Zalecenia płynące z sytuacji ukazanej w kolumnie 3 są jednoznaczne. Ponieważ funkcja dochodu jest tu rosnąca względem zmiennej x_1, zatem maksymalny dochód można zrealizować względem uprawy U_1 przeznaczając na jej uprawę tyle na ile pozwalają założenia wyjściowe tj. H_1 ha ($H_1 < H_1'$), gdyż na tyle tylko pozwalają zasoby siły roboczej. Pozostanie niewykorzystany kapitał i powierzchnia.

Sytuacja w kolumnie 5 mówi, że funkcja dochodu przyjmuje stałe i najwyższe wartości na 1 boku, tj. $H_2'\,p$, zatem można realizować maksymalny dochód na całym boku $H_2'p$ wg współrzędnych punktu p lub przeznaczyć wszystkie czynniki produkcji pod uprawę U_2, przeznaczając na nią powierzchnię równą H_2 ha. W tym przypadku wykorzysta się cały kapitał, pozostanie niewykorzystana siła robocze i powierzchnia.

Wynik analizy

Równania funkcji dochodu	$d_1 = d_2$	$d_2 > d_1$	$d_1 > d_2$		
			$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$
	1	2	3	4	5
1. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2'}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2'$	malej.	malej.	rosnąca	rosnąca	stała
2. $y = \left(d_1 - d_2 \frac{H_2}{H_1}\right) x_1 + d_2 H_2$	malej.	malej.	stała	rosnąca	malejąca

[1] Analogicznie jak w przypadku tabeli 1 można by ograniczyć się do 1 członu tabeli, tj. do 7 kolumn, gdyż dalsze 5 kolumn są mechanicznym powtórzeniem nie-

Kwestia wyboru zostaje jednoznacznie rozstrzygnięta w kolumnie 7 na rzecz uprawy U_2, gdyż funkcja dochodu jest malejąca względem x_1. Zatem należy wziąć do produkcji uprawę U_2.

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy:

$$H_2 > H_1$$
$$H_2' > H_1'$$

Załóżmy teraz, że tu jak w poprzednim przypadku $\frac{H_2}{H_1} \gtrless \frac{H_2}{H_1'}$,

$$\text{a zatem } d_2 \frac{H_2}{H_1} \gtrless d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$$

Zapiszmy wynik analizy w tabeli 4.

W tabeli 4 przymus zastosowania kombinacji obu upraw wynika tylko z kolumny 6, gdzie funkcja dochodu przybiera na boku 1 wartości rosnące, natomiast na boku 2 wartości malejące. Zatem maksimum dochodu można zapewnić tylko w punkcie p, wg współrzędnych tego punktu.

Jednoznaczne nakazy, tzn. możność ograniczenia się w produkcji do jednej uprawy wynikają z kolumn 1, 2, 4 i 7. Sytuacje ukazane w kolumnach 3 i 5 są analogiczne do sytuacji w kolumnach 2 i 3 tabeli 3. Ich interpretacja przebiega również identycznie.

Tak więc przegląd wartości funkcji dochodu dokonany przy różnych założeniach doprowadza do niewątpliwego wniosku o możliwości osiągnięcia przez gospodarstwo rolne maksymalnego dochodu przy zastosowaniu co najwyżej dwóch upraw, przy nałożeniu na produkcję trzech warunków ograniczających.

Tabela 4

funkcji dochodu [1]

$d_1 > d_2$						
$d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$		$d_1 = d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$			$d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$
$d_1 > d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2'}{H_1'}$		$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 > d_2 \frac{H_2}{H_1}$	$d_1 < d_2 \frac{H_2}{H_1}$	
6	7	8	9	10	11	12
rosnąca	malejąca	stała	rosnąca	rosnąca	rosnąca	malej.
malejąca	malejąca	malejąca	stała	rosnąca	malejąca	malej.

których sytuacji poprzednich. Równie jak w tabeli 1 podyktowane to jest przesłanką ukazania jednoczesnego przebiegu funkcji na obu bokach przy założeniu, że $d_1 > d_2$.

Zatem o czynniki produkcji mogą ze sobą konkurować każde dwie uprawy, dla których ich układ pracochłonności i kapitałochłonności jest taki, że tylko one spośród wielu innych są w stanie zapewnić gospodarstwu największą masę dochodu.

Przeprowadznie powyższego dowodu zwalnia nas od rozpatrywania sytuacji gdy gospodarstwo ma do wyboru więcej niż 2 uprawy. Nawet jeśli gospodarstwo może na swych glebach produkować „n" upraw, to zawsze może zapewnić sobie dochód maksymalny wybierając z „n" upraw po dwie (co najwyżej).

Rozważania powyższe mają charakter wywodzący się z zakresu programowania liniowego.

Można oczywiście dowód o braku przymusu uprawiania więcej jak 2 upraw dla zapewnienia dochodu maksymalnego przeprowadzić odmiennie, rozpoczynając od pewnej górnej granicy liczebności upraw a nie od dolnej, tzn. od dwóch jak to zostało uczynione. Należy sięgnąć wtedy do metody simplex, znanej w programowaniu liniowym. Posługując się tą metodą — otrzymuje się w rezultacie maksymalny dochód osiągany przez 2 uprawy, na które padł wybór spośród „n" wziętych do badania.

АЛИЦИЯ КАШУБА-ЦИБУРА
Институт Экономики Сельского Хозяйства
Варшава

ПО ВОПРОСУ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫМИ КУЛЬТУРАМИ

Содержание

В работе рассматривается вопрос конкуренций между культурами за производственные факторы в сельскохозяйственном предприятии при условии постоянной нормы субституции. В частности определяется нижний предел числа культур, которое следует возделывать, чтобы обеспечить хозяйству максимальный доход, предполагая существование трех ограничительных условий, вытекающих из ограниченности факторов производства.

Метод, примененный в решении этого вопроса, взят из линейного программирования. Исследованы величины функции дохода, которые она может достигать на краю известной территории, определяемой ограничительными и крайними условиями. В итоге этих рассуждений получены результаты из которых вытекает, что нижний предел числа культур которые следует возделывать чтобы получить максимальный доход составляют две сельскохозяйственные культуры.

ALICJA KASZUBA-CYBURA
Institute of Agricultural Economics
Warsaw

ABOUT THE COMPETITION BETWEEN CROPS

Summary

It is the problem of competition among the crops including the problems of production factors on the farm which is being considered in the work at the assessment of the stable substitution coefficient. One has concentrated in particular upon the determination of the inferior limit of crops number relationship i. e. determination of the lowest number of crops which had to be cultivated to assure to the farm the maximum income having imposed on production three limiting conditions which would result from the limited character of production factors.

The method used to solve this problem takes its source from the sphere of linear programming. One has investigated the income function values which might be reached by the function on the limit of some compass defined by limiting and marginal conditions. As consequence of these considerations the conclusions have been attained that the inferior limit of crops which were to be taken under cultivation to assure the maximum income amounted two crops.