ANATOL BRZOZA
Instytut Ekonomiki Rolnej
Warszawa

UWAGI NA TEMAT INTERPRETACJI WSPÓŁCZYNNIKÓW REGRESJI CZĄSTKOWEJ

Poniższe spostrzeżenia nasunęły się autorowi w toku badań nad możliwością i przydatnością zastosowania metod korelacji i regresji wielokrotnej do obliczania jednostkowych kosztów produkcji w gospodarstwach rolnych [1]. Badania te są kontynuowane i autor ma nadzieję w niedalekiej przyszłości bardziej gruntownie przedstawić zalety i wady proponowanej metody. W tym artykule uwaga skoncentrowana została na pewnym problemie metodologicznym, posiadającym — jak się wydaje — szersze znaczenie, wykraczające poza bezpośrednią problematykę wspomnianych badań. Dotyczy on interpretacji właściwości współczynników regresji cząstkowej w równaniu regresji wielokrotnej. Powszechnie przyjęta interpretacja sprowadza się do stwierdzenia, że współczynniki przy zmiennych niezależnych (cząstkowe współczynniki regresji) mówią nam o ile wzrośnie (zmaleje) zmienna zależna przy wzroście danej zmiennej niezależnej o jednostkę i przy założeniu, że wielkości pozostałych zmiennych niezależnych wpływających na zmienną zależną nie ulegną zmianie.

Definicja taka jest z punktu widzenia czysto matematycznego (algebraicznego) jak najbardziej poprawna, jednakże w wypadku szczególnego równania, jakim jest równanie regresji nie w pełni adekwatna. W tym bowiem wypadku nie uwzględnia ona genezy tego równania, ograniczając się wyłącznie do jego ostatecznej postaci. Tymczasem, jak wiadomo, równanie to (a w szczególności cząstkowe współczynniki regresji) jest wyprowadzone z układu odpowiedniej liczby równań pierwotnych. Np. równanie regresji:

$$(1) \quad Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k,$$

wyprowadzone jest z układu równań:

$$(2) \quad \begin{aligned} b_1 \Sigma x_1x_1 + b_2 \Sigma x_1x_2 + \dots + b_k \Sigma x_1x_k &= \Sigma yx_1 \\ b_1 \Sigma x_2x_1 + b_2 \Sigma x_2x_2 + \dots + b_k \Sigma x_2x_k &= \Sigma yx_2 \\ b_1 \Sigma x_kx_1 + b_2 \Sigma x_kx_2 + \dots + b_k \Sigma x_kx_k &= \Sigma yx_k \end{aligned}$$

[1] Anatol Brzoza: Zastosowanie regresji do obliczania kosztów organicznych. Zagadnienia Ekonomiki Rolnej nr 6/1962.

a stała a z równania pomocniczego

$$(3) \quad a = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 - b_2\bar{X}_2 - \ldots\ldots - b_k\bar{X}_k$$

W układzie równań (2) lewa strona każdego równania stanowi sumę sum iloczynów odchyleń poszczególnych wypadków danej zmiennej niezależnej od jej średniej przez odpowiednie odchylenia wszystkich pozostałych zmiennych niezależnych (objaśniających)[1], pomnożonych przez odpowiednie (niewiadome) współczynniki regresji cząstkowej $(b_1, b_2 \ldots b_k)$. Prawa zaś strona stanowi sumę iloczynów odchyleń danej zmiennej objaśniającej przez odchylenie zmiennej objaśnianej (zależnej). Innymi słowy — lewa strona równania wyraża sobą wzajemną interferencję (cross product) pomiędzy zmiennymi niezależnymi (objaśniającymi), prawa zaś zależność (współzmienność) zmiennej zależnej (objaśnianej) od niezależnych. Przy pewnych (poszukiwanych) wielkościach cząstkowych współczynników regresji obydwie strony układu równań równoważą się.

A zatem przesłanką, na podstawie której wyprowadzone zostało równanie regresji wielokrotnej i cząstkowe współczynniki regresji jest założenie, że współzależność (współzmienność) zachodzi nie tylko pomiędzy każdą ze zmiennych niezależnych i zmienną zależną, ale że również pomiędzy zmiennymi niezależnymi zachodzą określone powiązania i współzależności.

W istocie rzeczy, dla ogromnej większości wypadków (szczególnie w analizie ekonomicznej) nie tylko zmienna zależna jest skorelowana z poszczególnymi zmiennymi niezależnymi, ale i poszczególne zmienne zależne są pomiędzy sobą w mniejszym, lub większym stopniu skorelowane. Przedstawiony powyżej układ równań (2) można przekształcić w następujący układ, bardziej bezpośrednio potwierdzający powyższą tezę, a mianowicie:[2]

$$(4) \quad \begin{aligned} \beta_1 r_{11} + \beta_2 r_{12} + \ldots\ldots + \beta_k r_{1k} &= r_{1y} \\ \beta_1 r_{21} + \beta_2 r_{22} + \ldots\ldots + \beta_k r_{2k} &= r_{2y} \\ \beta_1 r_{k1} + \beta_2 r_{k2} + \ldots\ldots + \beta_k r_{kk} &= r_{ky} \end{aligned}$$

gdzie odpowiednie r stanowią proste współczynniki korelacji pomiędzy poszczególnymi zmiennymi, a β tzw. standardowe współczynniki regresji cząstkowej. Standardowe współczynniki można wyprowadzić ze zwykłych posługując się ogólnym wzorem:

$$(5) \quad \beta = b\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{\Sigma x^2}}, \text{ lub: } b = \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{\Sigma x^2}}}$$

Wyprowadzone na podstawie układu równań (4) standardowe współczynniki regresji cząstkowej (a z kolei, posługując się wzorem (5) zwykłe współczynniki regresji cząstkowej) wyrażają sobą siłę wpływu danej zmiennej zależnej na zmienną zależną, *uwolnioną* od związku danej zmiennej zależnej z innymi zmiennymi niezależnymi, równolegle działającymi na zmienną niezależną. Nie oznacza to jednak, że ostatecznie wy-

[1] W tym również przez siebie samą
$b_1 \Sigma x_1x_1 = b_1 \Sigma x_1^2$, $b_2 \Sigma x_2x_2 = b_2 \Sigma x_2^2$ itd.

[2] E. O. Heady, J. Z. Dillon: Agricultural Production Functions Iowa, 1961, s. 115.

prowadzona wielkość poszczególnych współczynników regresji cząstkowej przy danej zmiennej jest całkowicie *niezależna* od związku (współzmienności) zachodzącego pomiędzy poszczególnymi zmiennymi zarówno objaśniającymi, jak i objaśnianymi. Wręcz przeciwnie — związek ten współdecyduje o wielkości współczynnika regresji cząstkowej. Cząstkowy (czysty) wpływ danej zmiennej niezależnej, na daną zmienną zależną będzie w danym układzie słabszy lub silniejszy w porównaniu z innym układem, w zależności od tego, jak kształtują się współzależności (korelacje) z pozostałymi zmiennymi niezależnymi. A zatem współczynnik regresji cząstkowej nie wyraża sobą *absolutnej* wielkości, a jedynie wielkość *względną*.

Stwierdzenie powyższe ma istotne znaczenie nie tylko w sensie statystyczno-matematycznym, ale również, w szczególności, w zastosowaniu tej metody do badań ekonomicznych. Np. w wypadku badania wpływu tzw. czynników produkcji (ziemi, kapitału i pracy) na wielkość produkcji, uzyskane w równaniu regresji wielokrotnej odpowiednie cząstkowe współczynniki regresji (czy też cząstkowe współczynniki elastyczności w funkcji Coob-Douglasa) nie wyrażają sobą absolutnie niezależnego wpływu każdego z tych czynników, tak, jakby to na pozór wynikało z ostatecznej formy równania i z interpretacji, że współczynnik regresji cząstkowej wyraża sobą wpływ danego czynnika, przy założeniu, że pozostałe nie działają (są równe zeru, nie istnieją)[1]. Gdyby tak było — to doprowadzając rozumowanie *ad absurdum* — funkcja produkcji byłaby jednakowa dla wszystkich krajów i wszystkich czasów. Że tak nie jest — wynika właśnie z faktu, że związki pomiędzy ziemią, pracą i kapitałem są różne w różnych krajach i w różnych okresach. Nie chodzi w tym wypadku o zjawisko konkurencyjności czy też komplementarności pomiędzy poszczególnymi czynnikami, tzn. że działanie jednego z czynników osłabia lub wzmaga działanie pozostałych, lecz o to, że łączne ich działanie nie jest prostą sumą działania poszczególnych czynników z osobna. To zjawisko, jak wiadomo usiłuje się uwzględnić w drodze zastosowania metod regresji i korelacji sprzężonej. W tym przypadku chodzi o bardziej ogólny fakt odmiennego przebiegu współzmienności (a zatem i korelacji) poszczególnych czynników wskutek odmiennych proporcji tych samych czynników w dwóch różnych układach.

*

* *

Powyższe rozumowanie spróbujemy z kolei przedstawić i uzasadnić w oparciu o konkretne przykłady zaczerpnięte z prowadzonych badań nad zastosowanem regresji wielokrotnej przy obliczaniu kosztów jednostkowych produktów rolnych w gospodarstwach chłopskich prowadzących rachunkowość rolną w 1956/57 roku w dwóch rejonach: południowo-wschodnim i środkowo-zachodnim. W rejonie południowo-wschod-

[1] Szerzej w tej sprawie, patrz A. Brzoza: Przyczynek do zagadnienia funkcji produkcji w gospodarstwach chłopskich. Zagadnienia Ekonomiki Rolnej nr 2/1961.

nim równanie regresji pomiędzy wielkością nakładu globalnego na gospodarstwo a wielkością produkcji zboża, ziemniaków, buraków cukrowych, mleka, żywca wołowego, żywca wieprzowego i jaj wyprowadzono na podstawie indywidualnych wyników rachunkowości w grupie gospodarstw drobnych (3—7 ha). W rejonie środkowo-zachodnim odpowiednie równanie wyprowadzono na podstawie analogicznych danych z gospodarstw większych (powyżej 10 ha)[1]. Gwoli uniknięcia nieporozumień należy podkreślić, że nie będziemy się w tym artykule zajmowali merytoryczną oceną uzyskanych wyników, zarówno z punktu widzenia formalno-statystycznego, jak i ekonomiczno-rolniczego. Przyjmujemy umowne założenie, że uzyskane liczby są statystycznie istotne i ekonomicznie sensowne (W istocie, ani pierwsze, ani drugie założenie nie jest w pełni ścisłe — nie jest to jednak przedmiotem tych rozważań, a zarazem nie przeszkadza w wykorzystaniu tych wyników dla interesującego nas zagadnienia interpretacji współczynników cząstkowych). Uzyskane wyniki przedstawiają się następująco:

R e j o n p o ł u d n i o w o - w s c h o d n i

I. $X_1 = 22849 + 312{,}84\ X_2 — 41{,}62\ X_3 — 73{,}43\ X_4 + 1{,}13\ X_5 +$
$+ 21{,}64\ X_6 + 11{,}75\ X_7 + 1{,}53\ X_8$

R e j o n ś r o d k o w o - z a c h o d n i

II. $X_1 = 18399 — 19{,}78\ X_2 + 63{,}45\ X_3 — 1{,}31\ X_4 + 1{,}60\ X_5 +$
$+ 31{,}32\ X_6 + 16{,}95\ X_7 + 1{,}77\ X_8$

W równaniach tych: X_1 oznacza nakład globalny na gospodarstwo w zł, X_2 — produkcję zboża w q na gospodarstwo, X_3 — produkcję ziemniaka w q, X_4 = produkcję buraka cukrowego w q, X_5 — produkcję mleka w l, X_6 — produkcję żywca wołowego w kg, X_7 — produkcję żywca wieprzowego w kg, X_8 — produkcję jaj w sztukach na gospodarstwo. Liczby przy odpowiednich X są właśnie cząstkowymi współczynnikami regresji i mówią nam o ile złotych wzrośnie (zmaleje) nakład globalny, jeśli odpowiednie X zwiększymy o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe X nie ulegną zmianie.

Spróbujmy jednak nieco bliżej przeanalizować charakter współzależności (współzmienności), jakie miały miejsce w tych dwóch układach i zbadać, czy i jak wpłynęły one na takie, a nie inne ukształtowanie się wielkości poszczególnych współczynników. Zbadajmy przede wszystkim siłę związku pomiędzy poszczególnymi zmiennymi występującymi w obydwu równaniach. Związki te ilustrują nam odpowiednie tabele (1 i 1a) prostych współczynników korelacji pomiędzy poszczególnymi parami zmiennych. Tabele te wypełnione są tylko do przekątnej równej w każdym wypadku 0. Lewa dolna połowa tych tabel stanowi bowiem zwierciadlane odbicie lewej górnej połowy. Jak wiadomo bowiem $r_{ij} = r_{ji}$.

Pobieżny rzut oka na obydwie tabele mówi nam, że wielkość współczynnika korelacji pomiędzy poszczególnymi parami tych samych zmiennych jest w obydwu rejonach często bardzo różna. Np. prosta

[1] Obliczenia do artykułu przeprowadzili: inż. M. Sokołowska z IER i mgr J. Rajtar z SGPiS.

Tabela 1

Współczynniki prostej korelacji pomiędzy zmiennymi

Rejon południowo-wschodni 1956/57

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1,00	0,54	0,25	0,04	0,35	0,47	0,53	0,23
x_2		1,00	0,54	0,29	0,19	0,34	0,55	0,17
x_3			1,0	0,01	—0,33	0,10	0,53	0,19
x_4				1,00	0,15	0,22	0,19	0,03
x_5					1,00	0,23	0,23	0,16
x_6						1,00	0,43	0,13
x_7							1,00	0,12
x_8								1,00

Tabela 1a

Współczynniki prostej korelacji pomiędzy zmiennymi

Rejon środkowo-zachodni 1956/57

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1,00	0,48	0,61	0,23	0,76	0,80	0,78	0,60
x_2		1,00	0,62	0,39	0,39	0,41	0,39	0,28
x_3			1,00	0,16	0,40	0,48	0,44	0,27
x_4				1,00	0,35	0,31	0,02	0,25
x_5					1,00	0,68	0,54	0,52
x_6						1,00	0,56	0,58
x_7							1,00	0,48
x_8								1,00

korelacja pomiędzy nakładem i zbożem r_{12} jest w rejonie południowo-wschodnim znacznie silniejsza niż prosta korelacja nakładu z ziemniakiem — r_{13}. Odwrotnie przedstawia się sytuacja w rejonie środkowo-zachodnim. Korelacja pomiędzy wielkością produkcji ziemniaka a wielkością produkcji żywca wieprzowego — r_{37} jest w rejonie południowo-wschodnim znacznie silniejsza, niż korelacja pomiędzy nakładem i ziemniakiem. Odwrotnie ma się rzecz w rejonie środkowo-zachodnim.

Z drugiej strony, zarówno w rejonie południowo-wschodnim, jak i w środkowo-zachodnim najsłabszy związek z nakładem na gospodarstwo wykazuje wielkość produkcji buraka cukrowego — r_{14}. W obydwu rejonach stosunkowo wysokie okazały sie współczynniki korelacji nakładu z produkcją: mleka — r_{15}, żywca wołowego — r_{16} i żywca wieprzowego — r_{17} itd.

Jak już poprzednio zauważono, nie będziemy się w tym artykule zajmowali merytoryczną analizą tych wyników. To na co chcieliśmy zwrócić uwagę w tym wypadku — to zjawisko bardzo złożonych związków wewnętrznych w ramach poszczególnych układów i ich silne zróżnicowanie pomiędzy układami. Natomiast z reguły — przy interpretacji współczynników regresji cząstkowej, stanowiących niejako pochodną tych wzajemnych powiązań — przechodzi się nad nimi do porządku dziennego, koncentrując uwagę na ostatecznym wyniku, traktując uzyskany współczynnik jako wielkość absolutną i niezależną. Spróbujemy zatem prześledzić nieco bliżej proces kształtowania tego współczynnika.

W tym celu obliczymy przede wszystkim proste współczynniki regresji z jednej strony pomiędzy daną zmienną niezależną a zmienną zależną, z drugiej zaś, pomiędzy daną zmienną niezależną a wszystkimi pozostałymi zmiennymi niezależnymi, z nią skorelowanymi. Obliczenie to dla obydwu rejonów przedstawiają tabele 2 i 2a.

W tabelach tych w każdym wierszu przedstawiony jest wpływ (rozmiar współzmienności) danej zmiennej niezależnej na zmienną zależną i na pozostałe zmienne niezależne. Dla przykładu w wierszu b_2 dla rejonu południowo-wschodniego widzimy, że zwiększenie zbioru zbóż na gospodarstwo o 1 q znajduje swój wyraz we wzroście nakładu globalnego o 428 zł. Jest to jednak prosty współczynnik regresji. We wzroście nakładu o 428 zł kryje się nie tylko wpływ zwiększenia produkcji zboża o 1 q, ale i wpływ innych czynników, których prosty współczynnik regresji nie ujawnia. Na czym te wpływy innych czynników polegają?

Otóż zwiększenie zboża o 1 q w *danym układzie* powoduje, a ściślej mówiąc, jest jednocześnie współzmienne ze zwiększeniem produkcji

Tabela 2

Współczynniki regresji prostej pomiędzy zmiennymi

Południowo-wschodni 1956/57

b_{12} 428,21 zł/q	b_{32} 1,43 q/q	b_{42} 0,63 q/q	b_{52} 22,79 l/q	b_{62} 2,84 kg/q	b_{72} 10,18 kg/q	b_{82} 9,66 szt/q
b_{13} 14,63 zł/q	b_{23} 0,20 q/q	b_{43} 0,01 q/q	b_{53} —1,47 l/q	b_{63} 0,32 kg/q	b_{73} 3,63 kg/q	b_{83} 3,97 szt/q
b_{14} 2,33 zł/q	b_{24} 0,13 q/q	b_{34} 0,01 q/q	b_{54} 8,32 l/q	b_{64} 0,83 kg/q	b_{74} 1,61 kg/q	b_{84} 0,80 szt/q
b_{15} 2,33 zł/l	b_{25} 0,002 q/l	b_{35} —0,0007 q/l	b_{45} 0,003 q/l	b_{65} 0,016 kg/l	b_{75} 0,035 kg/l	b_{85} 0,074 szt/l
b_{16} 44,75 zł/kg	b_{26} 0,04 q/kg	b_{36} 0,03 q/kg	b_{46} 0,06 q/kg	b_{56} 3,25 l/kg	b_{76} 0,92 kg/kg	b_{86} 0,86 szt/kg
b_{17} 22,66 zł/kg	b_{27} 0,03 q/kg	b_{37} 0,08 q/kg	b_{47} 0,02 q/kg	b_{57} 1,48 l/kg	b_{67} 0,19 kg/kg	b_{87} 0,38 szt/kg
b_{18} 3,27 zł/szt	b_{28} 0,003 q/szt	b_{38} 0,009 q/szt	b_{48} 0,001 q/szt	b_{58} 0,33 l/szt	b_{68} 0,02 kg/szt	b_{78} 0,04 kg/szt

Tabela 2a

Współczynniki regresji prostej pomiędzy zmiennymi

Środkowo-zachodni 1956/57

b_{12}	b_{32}	b_{42}	b_{52}	b_{62}	b_{72}	b_{82}
448,24	1,76	1,38	58,18	3,73	7,59	10,84
zł/q	q/q	q/q	l/q	kg/q	kg/q	szt/q
b_{13}	b_{23}	b_{43}	b_{53}	b_{63}	b_{73}	b_{83}
199,05	0,22	0,20	21,26	1,53	3,06	3,69
zł/q	q/q	q/q	l/q	kg/q	kg/q	szt/q
b_{14}	b_{24}	b_{34}	b_{54}	b_{64}	b_{74}	b_{84}
59,12	0,11	0,13	14,69	0,77	0,12	2,68
zł/q	q/q	q/q	l/q	kg/q	kg/q	szt/q
b_{15}	b_{25}	b_{35}	b_{45}	b_{65}	b_{75}	b_{85}
4,74	0,003	0,008	0,008	0,041	0,07	0,13
zł/	q/l	q/l	q/l	kg/q	kg/l	szt/l
b_{16}	b_{26}	b_{36}	b_{46}	b_{56}	b_{76}	b_{86}
82,71	0,05	0,15	0,12	11,27	1,21	2,45
zł/kg	q/kg	q/kg	q/kg	l/kg	kg/kg	szt/kg
b_{17}	b_{27}	b_{37}	b_{47}	b_{57}	b_{67}	b_{87}
36,94	0,02	0,06	0,004	4,13	0,26	0,93
zł/kg	q/kg	q/kg	q/kg	l/kg	kg/kg	szt/kg
b_{18}	b_{28}	b_{38}	b_{48}	b_{58}	b_{68}	b_{78}
14,42	0,007	0,02	0,02	2,01	0,14	0,24
zł/szt	q/szt	q/szt	q/szt	l/szt	kg/szt	kg/szt

ziemniaka o 1,43 q — b_{32}, buraka cukrowego o 0,63 q — b_{42}, mleka o 22,8 l — b_{52}, żywca wołowego o 2,84 kg — b_{62}, żywca wieprzowego o 10,18 kg — b_{72} i jaj o 9,66 szt. — b_{82}. Można zatem postawić hipotezę, że na łączny efekt zwiększenia produkcji zboża w danym układzie gospodarstw o jednostkę składa się zarówno *czysty* efekt zwiększenia zboża, jak i suma *czystych* efektów zmian w wielkości produkcji wszystkich pozostałych produktów współzmiennych z produkcją zbóż.

Potwierdzeniem powyższej hipotezy jest obliczenie przeprowadzone dla obydwu rejonów w poniższych tabelach:

Obliczenie to zostało przeprowadzone w sposób następujący. Od wielkości **prostego współczynnika regresji pomiędzy danym produktem a nakładem** odjęta została **suma iloczynów prostych współczynników regresji pomiędzy danym produktem a pozostałymi skorelowanymi z nim produktami, przez ich cząstkowe współczynniki regresji z nakładem.** Uzyskany wynik daje w rezultacie cząstkowy współczynnik regresji pomiędzy danym produktem i nakładem [1].

[1] Cząstkowe współczynniki regresji dla poszczególnych produktów przyjęto na podstawie równań regresji I i II. Uzyskane wyniki różnią się nieznacznie od wielkości poszczególnych cząstkowych współczynników w równaniu, ze względu na zaokrąglenia w toku rachunku.

Tabela 3

Wyprowadzenie współczynników regresji cząstkowej z współczynników regresji prostej [a]

Południowo-wschodni 1956/57

b_{12}	b'_{32}	b'_{42}	b'_{52}	b'_{62}	b'_{72}	b'_{82}	$\Sigma b'_{ij}$	$b_{1j} - \Sigma b'_{ij}$	$b_{12,3 \cdot \cdot 8}$
428,21	—59,52	—46,26	25,75	61,46	119,62	14,78	115,83	312,38	312,84
b_{13}	b'_{23}	b'_{43}	b'_{53}	b'_{63}	b'_{73}	b'_{83}			$b_{13,2 \cdot \cdot 8}$
75,20	62,57	—0,73	—1,66	6,92	42,65	6,07	115,82	—40,62	—41,62
b_{14}	b'_{24}	b'_{34}	b'_{54}	b'_{64}	b'_{74}	b'_{84}			$b_{14,2 \cdot \cdot 8}$
14,63	40,67	—0,42	9,40	17,96	18,92	1,22	87,75	—73,12	—73,43
b_{15}	b'_{25}	b'_{35}	b'_{45}	b'_{65}	b'_{75}	b'_{85}			$b_{15,2 \cdot \cdot 8}$
2,33	0,62	0,03	—0,22	0,35	0,41	0,11	1,30	1,03	1,13
b_{16}	b'_{26}	b'_{36}	b'_{46}	b'_{56}	b'_{76}	b'_{86}			$b_{16,2 \cdot \cdot 8}$
44,75	12,51	—1,25	—4,40	3,67	10,81	1,31	22,65	22,10	21,64
b_{17}	b'_{27}	b'_{37}	b'_{47}	b'_{57}	b'_{67}	b'_{87}			$b_{17,2 \cdot 8}$
22,66	9,38	—3,33	—1,47	1,67	4,11	0,58	10,94	11,72	11,75
b_{18}	b'_{28}	b'_{38}	b'_{48}	b'_{58}	b'_{68}	b'_{78}			$b_{18,2 \cdot \cdot 7}$
3,27	0,94	—0,37	—0,07	0,37	0,41	0,47	1,75	1,52	1,53

[a] $b'_{32} = b_{13,2 \cdot \cdot 8} \cdot b_{32}$ itd.

Tabela 3a

Wyprowadzenie współczynników regresji cząstkowej z współczynników regresji prostej [a]

Środkowo-zachodni 1956/57

b_{12}	b'_{32}	b'_{42}	b'_{52}	b'_{62}	b'_{72}	b'_{82}	$\Sigma b'_{ij}$	$b_{1j} - \Sigma b'_{ij}$	$b_{12,3 \cdot \cdot 8}$
448,24	112,01	—1,81	93,09	116,89	128,56	19,19	467,93	—19,69	—19,78
b_{13}	b'_{23}	b'_{43}	b'_{53}	b'_{63}	b'_{73}	b'_{83}			$b_{13,2 \cdot \cdot 8}$
199,05	—4,36	—0,27	34,02	47,83	54,80	6,53	135,55	63,50	63,45
b_{14}	b'_{24}	b'_{34}	b'_{54}	b'_{64}	b'_{74}	b'_{84}			$b_{14,2 \cdot \cdot 8}$
59,12	—2,15	8,13	23,50	24,18	2,02	4,74	60,42	—1,30	—1,31
b_{15}	b'_{25}	b'_{35}	b'_{45}	b'_{65}	b'_{75}	b'_{85}			$b_{15,2 \cdot \cdot 8}$
4,74	—0,5	0,48	—0,01	1,28	1,19	0,23	3,12	1,62	1,60
b_{16}	b'_{26}	b'_{36}	b'_{46}	b'_{56}	b'_{76}	b'_{86}			$b_{16,2 \cdot \cdot 8}$
82,71	—0,91	9,54	—0,16	18,03	20,51	4,34	51,35	31,36	31,32
b_{17}	b'_{27}	b'_{37}	b'_{47}	b'_{57}	b'_{67}	b'_{87}			$b_{17,2 \cdot \cdot 8}$
—36,94	—0,39	4,07	—0,01	6,61	8,08	1,64	20,00	16,94	16,95
b_{18}	b'_{28}	b'_{38}	b'_{48}	b'_{58}	b'_{68}	b'_{78}			$b_{18,2 \cdot \cdot 7}$
14,42	—0,15	1,28	—0,03	3,22	4,26	4,07	12,65	1,77	1,77

[a] $b'_{32} = b_{13,2 \cdot \cdot 8} \cdot b_{32}$

Zależność powyższą można wyrazić wzorem:

$$b_{12.345678} = b_{12} - [(b_{13.2..8}b_{32}) + (b_{14.2..8}b_{42}) + \ldots + (b_{18.2..7}b_{82})],$$

względnie wychodząc z wzoru na prosty współczynnik regresji

$$b_{ij} = \frac{\Sigma x_i x_j}{\Sigma x_j^2}$$

$$b_{12.345678} = \frac{\Sigma x_1 x_2 - [(b_{13.2..8}\Sigma x_3 x_2) + (b_{14.2..8}\Sigma x_4 x_2) + \ldots + (b_{18.2..7}\Sigma x_8 x_2)]}{\Sigma x_2^2}$$

Na podstawie odpowiedniego przekształcenia powyższych wzorów można oczywiście i odwrotnie — mając dane cząstkowe współczynniki regresji pomiędzy zmienymi niezależnymi a zmienną zależną i proste współczynniki regresji pomiędzy zmiennymi niezależnymi — obliczyć prostą regresję pomiędzy zmienną zależną i każdą ze zmiennych niezależnych.

Istotne jest jednak to, że wzór ten wyjaśnia wewnętrzną treść współczynnika regresji cząstkowej i ujawnia jego genezę. Twierdzenie, że współczynnik regresji cząstkowej mówi nam o ile wzrośnie zmienna zależna pod wpływem wzrostu zmiennej niezależnej o jednostkę i przy założeniu, że wszystkie pozostałe zmienne niezależne *nie ulegają zmianie* nie jest w danym wypadku adekwatne, gdyż w danym układzie sprzężonym (skorelowanym wewnętrznie) zmianie danej zmiennej niezależnej z reguły towarzyszą zmiany wszystkich pozostałych zmiennych. W istocie rzeczy współczynnik regresji cząstkowej mówi nam o ile zmieni się zmienna zależna pod wpływem wzrostu danej zmiennej niezależnej o jednostkę po odjęciu (wyeliminowaniu) *wszystkich zmian, jakie zaszły jednocześnie u wszystkich pozostałych zmiennych niezależnych i czystych wpływów tych zmian na zmienną zależną*[1].

Cząstkowy współczynnik regresji kształtuje się zatem nie w układzie statycznym (jeden czynnik ulega zmianie, a pozostałe są niezmienne), a przeciwnie — kształtuje się w układzie dynamicznym, w drodze eliminowania zmian i wpływów pozostałych czynników.

Najistotniejsze jednak już nie tylko w statystycznej, ale i merytorycznej (np. ekonomiczno-rolniczej) interpretacji uzyskanej wielkości współczynnika regresji cząstkowej jest widzenie „środowiska" w jakim występuje i z jakim jest powiązana kryjąca się za tym współczynnikiem analizowana zmienna niezależna. Jej „czysty" wpływ na zmienną zależną zależy nie tylko od jej wewnętrznych właściwości, ale i od towarzystwa, w którym występuje. W przytoczonych poprzednio przykładach wpływu produkcji na wielkość nakładu na gospodarstwo, w dwóch rejonach, charakterystyczny jest np. fakt, że proste współczynniki regresji pomiędzy produkcją zboża na gospodarstwo a nakładem na gospodarstwo są do siebie bardzo zbliżone. W rejonie południowo-wschodnim zwiększenie zboża o 1 q zwiększa nakład na gospodarstwo o 428 zł, w rejonie środkowo-zachodnim o 448 zł. Jednakże zboże w drobnych

[1] Na marginesie wypada zauważyć, że stosowane niekiedy określenie: współczynnik regresji netto wydaje się bardziej adekwatne niż współczynnik regresji cząstkowej.

gospodarstwach rejonu południowo-wschodniego występuje w innym „towarzystwie" i inne są jego powiązania z pozostałymi produktami działającymi na nakład, niż zboża w większych gospodarstwach rejonu środkowo-zachodniego. W rezultacie, po odjęciu czystych wpływów tych powiązań, wpływ netto dodatkowego kwintala zboża w rejonie południowo-wschodnim wyraża się wielkością nie 428 a 313 zł, a w rejonie środkowo-zachodnim nie 448 a — 20 zł. Nie przywiązując w tej chwili istotnej wagi do uzyskanych absolutnych wielkości, można jednak stwierdzić, że zwiększenie produkcji zboża w drobnych gospodarstwach znacznie silniej odbija się na kosztach całego gospodarstwa niż w dużych gospodarstwach. Potwierdza to raz jeszcze trafność cytowanej w poprzednim artykule tezy prof. Manteuffla, że wielkość jednostkowego kosztu produkcji obliczonego metodą organiczną będzie różna w zależności od tego w jakim „towarzystwie" produkcja będzie się odbywała. Do tych spraw jednak wypadnie nam chyba jeszcze powrócić.

АНАТОЛ БЖОЗА
Институт Экономики Сельского Хозяйства
Варшава

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВОПРОСУ ТОЛКОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧАСТНОЙ РЕГРЕССИИ

Содержание

Автор подвергает критике общепринятое толкование коэффициентов частной регдессии, из которого следует, что они выражают влияние одной из независимых переменных на зависимую переменную при условии, что остальные независимые переменные постоянны. Это толкование не учитывает имеющее место корреляции между независимыми переменными и ее влияния на величину коэффициентов частной регресии между каждой отдельно взятой независимой переменной и зависимой переменной.

С точки зрения толкования по существу это приводит к отвлечению от роли среди в которой действует данный фактор.

На основе анализа, приведенного на конкретном примере, автор выводит соответствующую статистико-математическую формулу из которой вытекает, что коэффициент частной регрессии говорит на сколько изменится переменная зависимая под влиянием независимой переменной после устранения всех изменений, которые одновременно произошли у всех остальных независимых переменных и чистого влияния этих изменений на зависимую переменную.

ANATOL BRZOZA
Institute of Agricultural Economics
Warsaw

REMARKS ON THE INTERPRETATION OF PARTIAL REGRESSION COEFFICIENTS

Summary

The author criticizes the adopted interpretation of coefficients of partial regression; according to this interpretation the said coefficients express the influence of one out of many independant variables upon dependant variable at the assumption that the remaining variables do not change. Such interpretation does not take into account the correlation which usually takes place between the independant variables and does not take into account the influence of this correlation in the size of the partial regression coefficients between each independant variable and the dependant one.

From the viewpoint of the meritorious interpretation (in merits) it leads towards neglecting of the role of the environment in which the given factor is acting.

The author drows statistical-mathematical formula out of which results that the coefficient of partial regression is informing on how much would change the dependant variable, being influenced by the increase of the given independant variable, after all changes which have taken plabe at the same time with all the remaining independant variables as well as net influence of those changes upon the dependant variable have been eliminated.