

Artykuły

ERNST BERG
Uniwersytet w Bonn

OPTYMALIZACJA PRODUKCJI W ZALEŻNOŚCI OD STANU NATURY W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI*

Wprowadzenie

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych koncepcji uwzględniających niepewność w podejmowaniu decyzji jest teoria użyteczności oczekiwanej, na podstawie której określa się możliwe wyniki działań poprzez funkcję użyteczności ryzyka, jako bezwymiarowej podstawowej jednostki użyteczności. Kryterium przyporządkowania dla alternatywnych działań z niepewnym wynikiem jest wtedy wartość oczekiwana, co z kolei wymaga znajomości rozkładu prawdopodobieństwa wyników działania. Wartość oczekiwana użyteczności ryzyka – krótko mówiąc, wartość oczekiwana funkcji użyteczności – może zostać określona przez inwersję funkcji użyteczności na wielkość pieniężną, którą określa się mianem ekwiwalentu pewności [31]. Odpowiada on pewnej gwarantowanej kwocie pieniędzy, dla której decydent przyporządkowałby identyczną wartość danej funkcji użyteczności jak dla wyników działań alternatywnych, obarczonych niepewnym wynikiem. Użyteczność oczekiwana i ekwiwalent pewności prowadzą do ustalenia identycznej hierarchii możliwych wyborów decydenta.

Zgodnie z definicją, ekwiwalent pewności wartości oczekiwanej odpowiada wartości pieniężnej pomniejszonej o wielkość premii za ryzyko. Dla tej ostatniej Pratt [27] opracował aproksymacje na podstawie wariancji wartości oczekiwanej, która bezpośrednio korzysta z modelu oczekiwanej stopy zwrotu, oraz wariancji, która – choć jedynie pod pewnymi warunkami – jest równoważna koncepcji użyteczności oczekiwanej. Zyskała ona również szerokie zastosowanie.

Przy obydwu podejściach problem decyzji sprowadza się ostatecznie do wyboru między alternatywnymi rozkładami prawdopodobieństwa rezultatów działań, ewentualnie też ich kombinacji. Występuje to np. w przypadku lokat finansowych, dla których rozkłady prawdopodobieństwa dotyczą oczekiwanych stóp zwrotu. Wybór form inwestycji jest wtedy równoznaczny z wybo-

* Artykuł został przetłumaczony przez dr. Macieja Pankiewicza.

rem rozkładów prawdopodobieństwa. Inaczej natomiast kształtują się proporcje przy rozpatrywaniu ryzyka produkcji, tzn. niepewności rzeczywistych plonów. W tym przypadku decyzje dotyczą zaangażowania czynników produkcji według kryterium ilości i czasu, podczas gdy niepewność dotyczy wpływu niekontrolowanych czynników (takich jak pogoda czy choroby lub szkodniki) na poniesione nakłady. Niepewność występuje zatem w funkcji produkcji. Zazwyczaj próbuje się ten kontekst wziąć pod uwagę, rozszerzając (deterministyczne) funkcje produkcji o elementy stochastyczne. Konkretnie oznacza to, że jeśli x przedstawia wektor czynników produkcji, a ε reprezentuje zdarzenia losowe, wtedy fizyczny dochód oblicza się zgodnie ze stochastyczną funkcją produkcji $f(x, \varepsilon)$. Na podstawie tej metody można wtedy wydedukować reakcje decydentów na zmiany warunków ramowych przy uwzględnieniu niepewności i stosunku do ryzyka, stosownie do koncepcji użyteczności oczekiwanej lub teorii od niej wyprowadzonych [7, 31].

Chambers i Quiggin [10, 11, 12] krytykują to podejście, ponieważ nie uwzględnia ono szczegółowych zależności między niekontrolowanymi zmiennymi a zmiennymi decyzyjnymi, a zatem niewystarczająco odzwierciedla sytuację decyzyjną. W rzeczywistości, na plon mają wpływ różnorodne stany natury (np. opady, szkodniki itd.), na które decydent może odpowiednio zareagować (np. poprzez nawadnianie lub zwalczanie szkodników). Te *zależne od stanu natury* decyzje nie są prawidłowo odwzorowywane przez stochastyczną teorię funkcji produkcji w zaprezentowanej powyżej formie. Z tego powodu Chambers i Quiggin opracowali zależne od stanu (tzn. „state-contingent”) przedstawienie procesu produkcji w warunkach niepewności, które umożliwiałoby bardziej realistyczne przedstawienie zarówno indywidualnych procesów decyzyjnych, jak i wynikających z nich reakcji rynku.

Zaproponowana przez Chambersa i Quiggina teoria jest koncepcją, która – z jednej strony – jest postępowaniem od strony metodologicznej, lecz z drugiej – wciąż brakuje dowodu na jej empiryczne zastosowanie. Próby empirycznego zastosowania dotyczą przede wszystkim oszacowania funkcji produkcji [25, 29], jak i analizy efektywności [26]. Koncepcja ta została wykorzystana również przez Adamsona [1] w modelu programowania matematycznego.

W artykule zajęto się teorią zależności od stanu natury w kontekście programowania matematycznego. W pierwszej części wywodu objaśniono koncepcyjne podstawy teorii. Następnie przedstawiono jej zastosowanie w ramach matematycznej optymalizacji w warunkach niepewności oraz porównano do tradycyjnych koncepcji programowania matematycznego. W końcowej części artykułu przedstawiono możliwości i ograniczenia tej teorii.

Użyteczność i wartość transferu ryzyka w teorii zależności od stanu natury

Podstawy teorii zależności od stanu natury nie są nowe. Teoria ta wynika z wcześniejszych prac Arrowa i Debreua [3], później rozwiniętych i udoskonalonych przez Hirshleifera i Rileya [19, 20] w kontekście teorii decyzji inwe-

stycyjnych. Uogólniając, analizuje ona zachowania uczestników rynku, a więc procesy wymiany. Natomiast Chambers i Quiggin skoncentrowali swoje przemyślenia na stochastycznej naturze procesów produkcyjnych i ich konsekwencji w procesie podejmowania decyzji.

Podstawowe założenie mówi, że istnieje grupa dyskretnych (przyszłych) stanów natury, z których jeden będzie zrealizowany niezależnie od wcześniej podjętej decyzji, jednak z konsekwencjami dla uzyskanych rezultatów. Jeśli zakłada się, upraszczając, tylko dwa możliwe stany natury, to istnieje możliwość przedstawienia tych związków w formie graficznej (rys. 1). Osie oznaczają dochód, który za każdym razem zostanie uzyskany przy wystąpieniu stanu 1 lub 2. Tak więc punkt $y = (y_1^* y_2^*)$ reprezentuje wektor dochodu zależnego od stanu natury, który np. wynika z określonego programu produkcji.

Jeśli decydent postępowałaby według wklęsłej funkcji użyteczności ryzyka $u(y)$, wtedy uzyskana użyteczność oczekiwana U od $y = (y_1, y_2)$ jest określona jako:

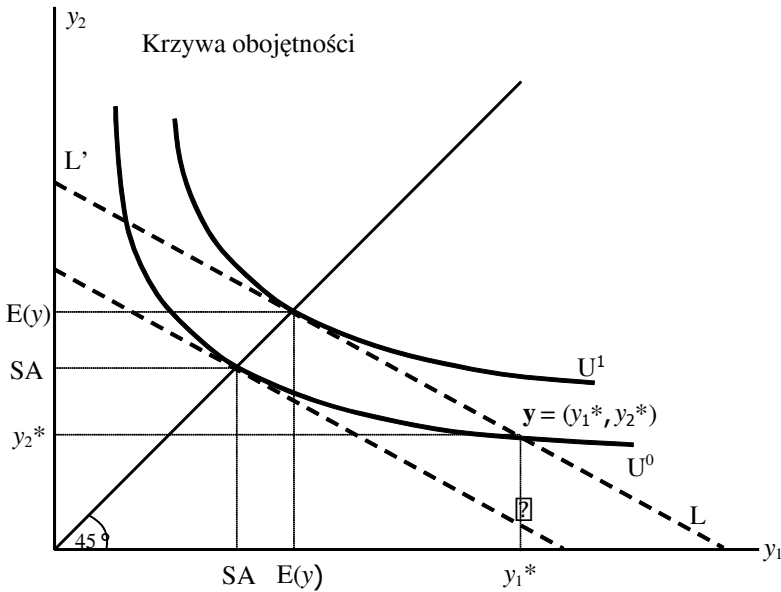
$$U = \pi_1 u(y_1) + \pi_2 u(y_2), \quad \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad (1)$$

gdzie π_1 i π_2 przedstawiają prawdopodobieństwa wystąpienia stanów natury. Przy wklęsłej funkcji użyteczności ryzyka (awersja do ryzyka) i danym poziomie użyteczności $U = U^0$ równanie (1) reprezentuje krzywą obojętności użyteczności, jak to pokazano na rysunku 1. Wartość oczekiwana dochodów $E(y)$ w równaniu 2:

$$E(y) = \pi_1 y_1 + \pi_2 y_2 \quad (2)$$

wskazuje, że wszystkie kombinacje zależnych od stanu dochodów leżą na prostych LL' reprezentowanych przez (2) z nachyleniem $(-\pi_1/\pi_2)$, prowadzących do tej samej wartości oczekiwanej $E(y)$ (izolinia wartości oczekiwanej). Wartość oczekiwana $E(y)$, dla której jest określona najwyższa użyteczność, leży w punkcie przecięcia tych prostych z prostą 45° (od początku układu współrzędnych) i reprezentuje tym samym sytuację w warunkach pewności, gdyż dochód dla obu stanów jest identyczny (czyli $E(y)$). Na prostej 45° leżą wszystkie kombinacje, dla których obowiązuje $y_1 = y_2$, dlatego określana jest ona również jako prosta pewności [19]. Decydent z awersją do ryzyka faworyzowałby pewny dochód $E(y)$ w stosunku do każdej niepewnej perspektywy z tą samą wartością oczekiwaną (tzn. każdą kombinację na LL'' poniżej lub powyżej linii 45°), ponieważ prowadziłby on do wyższego poziomu użyteczności (U^1 na rys. 1). Z drugiej strony, istnieje dla każdego niepewnego wektora dochodu $y = (y_1, y_2)$ dochód pewny, który określa tę samą użyteczność. Jest to *ekwiwalent pewności* (SA) i odpowiada na rysunku 1 punktowi przecięcia funkcji krzywej obojętności użyteczności, która przechodzi przez $y = (y_1^* y_2^*)$, z linią 45° . Różnica między wartością oczekiwaną a ekwiwalentem pewności ($E(y) - SA$) reprezentuje wtedy premię za ryzyko. Określa ona sumę pieniężną, z której decydent z awersją do ryzyka byłby gotów zrezygnować w zamian za pewność. Nie powinna być ona

mylona z premią (netto) ryzyka, która jest pobierana jako część składek premii (brutto) w ramach umów ubezpieczenia¹.



Rys. 1. Dochody zależne od stanu natury, użyteczność oczekiwana i ekwiwalent pewności

Nachylenie krzywej obojętności można określić na podstawie równania funkcji użyteczności oczekiwanej (1) [19]. Występuje wówczas zależność:

$$-\left. \frac{dy_2}{dy_1} \right|_{U=\text{stałe}} \equiv \frac{\pi_1 u'(y_1)}{\pi_2 u'(y_2)} \quad (3)$$

gdzie $u'(\cdot)$ reprezentuje pierwszą pochodną funkcji użyteczności. Na tej podstawie wartość bezwzględna nachylenia krzywej obojętności odpowiada ilorazowi odpowiednich krańcowych użyteczności dla ważonych prawdopodobieństw wystąpienia poszczególnych stanów. W punkcie przecięcia z linią 45° każda krzywa obojętności posiada nachylenie $(-\pi_1 / \pi_2)$, tzn. krańcowa stopa substytucji pomiędzy zależnym od stanu dochodem będzie w tym miejscu określona przez stosunek prawdopodobieństw wystąpienia stanów $(\pi_1 / \pi_2)^2$.

Założenie, że decydent mógłby zawrzeć ubezpieczenie, które dla niekorzystnego stanu z_2 umożliwi wypłatę odszkodowania, wymaga niezależnie od oczekiwanego stanu natury premii P (składki ubezpieczeniowej). „Szkoda”

¹ Podstawowe związki między użytecznością oczekiwaną, ekwiwalentem pewności i premią ryzyka są opisane w pozycjach [2, 4, 13, 14, 22].

² Ponieważ dochody dla obu stanów są identyczne, obowiązuje to również dla użyteczności krańcowej $u'(\cdot)$ w (3), które się w ten sposób skrótą.

w przypadku wystąpienia z_2 odpowiada różnicy $y_1 - y_2$, tak że przy dowolnym wyborze stopnia pokrycia α świadczenie ubezpieczeniowe w przypadku szkody wynosi $\alpha (y_1 - y_2)$. Wartość oczekiwaną dochodu z ubezpieczeniem określa wtedy:

$$E(y) = \pi_1 y_1 + \pi_2 [y_2 + \alpha(y_1 - y_2)] - P, \quad (4)$$

z czego wynika, że w przypadku pełnego ubezpieczenia (tj. $\alpha = 1$) stały dochód $y_1 - P$ odpowiada na rysunku 1 punktowi na przekątnej. Równanie (4) reprezentuje tzw. prostą ubezpieczenia, której dalsze określenie wymaga jeszcze dokładniejszego zdefiniowania premii. Załóżmy najpierw, że premia odpowiada oczekiwanej szkodzie (tzw. uczciwa premia lub premia ryzyka netto), tak że $P = \pi_2 \alpha (y_1 - y_2)$. Po podstawieniu tego wyrażenia do równania (4), redukuje się ono do (2), tzn. przy uczciwej premii zbiegają się: prosta ubezpieczenia z początkową izolinia wartości oczekiwanej, która z tego powodu jest też określana jako linia jednakowego zysku (*fair odds line*). Przy zawarciu ubezpieczenia z uczciwą premią, przesunąłby się tym samym punkt $y = (y_1^*, y_2^*)$ z wzrastającym stopniem pokrycia na izolinii wartości oczekiwanej LL' w kierunku linii 45°. Każdy decydent z awersją do ryzyka zawarłby w tym przypadku – niezależnie od stopnia awersji do ryzyka – pełne ubezpieczenie, aby zrealizować pewny dochód $E(y)$.

Ponieważ firmy ubezpieczeniowe muszą pokryć dochodami z premii oprócz odszkodowania również koszty administracyjne i koszty ogólne, pobierają składki wyższe niż wysokość uczciwej premii. Także w tym przypadku pełne ubezpieczenie pozostaje preferowanym rozwiązaniem, dopóki nie jest wymagana dodatkowa dopłata. W tym przypadku premia wynosi $P = \pi_2 \alpha (y_1 - y_2) + \beta$, przy czym β reprezentuje narzut na premię uczciwą. Po podstawieniu do równania (4), $E(y)$ wyniesie:

$$E(y) = \pi_1 y_1 + \pi_2 y_2 - \beta, \quad (5)$$

tzn. że prosta ubezpieczenia jest przesunięta w stosunku do prostej jednakowego zysku równoległe w kierunku początku układu współrzędnych. Tym samym, warunek styczości jest spełniony również w tym przypadku przy pełnym ubezpieczeniu, jednakże pewny dochód jest mniejszy o narzut β od $E(y)$. Ponadto ubezpieczenie pozostaje tak długo atrakcyjne, dopóki dopłata nie przekroczy zgodnie z powyższą definicją premii za ryzyko.

W praktyce ubezpieczeń względne narzuty premii są regułą, tzn. obowiązuje $P = \pi_2 \alpha (y_1 - y_2) (1 + \gamma)$, przy czym γ przedstawia udział, o który premia za ryzyko netto zostanie zwiększona. Podstawiając to wyrażenie do równania (4), otrzymujemy:

$$E(y) = (\pi_1 - \alpha \gamma \pi_2) y_1 + \pi_2 (1 + \alpha \gamma) y_2$$

$$\text{lub z } \pi_1 = 1 - \pi_2:$$

$$E(y) = [1 - \pi_2 (1 + \alpha \gamma)] y_1 + \pi_2 (1 + \alpha \gamma) y_2 \quad (6)$$

Z czego nachylenie prostej ubezpieczenia jest określone jako:

$$-\frac{1 - \pi_2(1 + \alpha \gamma)}{\pi_2(1 + \alpha \gamma)}$$

W porównaniu do prostej jednakowego zysku o nachyleniu $(\pi_1/\pi_2) = (1 - \pi_2)/\pi_2$, prosta ubezpieczenia przebiega teraz bardziej płasko. Z powodu warunku styczności częściowe ubezpieczenie (tj. stopień pokrycia $\alpha < 1$) będzie optymalne.

Uwzględnienie decyzji produkcyjnych

Dotychczasowa analiza odnosi się do transferu ryzyka w określonej sytuacji wyjściowej w odniesieniu do dochodu zależnego od stanu natury. W środowisku produkcyjnym transfer ryzyka jest wynikiem decyzji produkcyjnych, które są reakcją na sytuacje niepewności. Uwzględnienie tych działań w kontekście teorii zależności od stanu natury wymaga odpowiedniego sformułowania stochastycznej technologii produkcji. Ogólnie można ją scharakteryzować jako funkcję transformacji T w następujący sposób [30]:

$$T(x, z) = 0 \quad (7)$$

Równanie (7) jest niejawnym opisem wszystkich technicznie wydajnych możliwości produkcyjnych, przy czym x przedstawia wektor (x_1, \dots, x_N) czynników produkcji (inputs), a z wektor (z_1, \dots, z_S) zależnych od stanu wielkości produkcji (outputs)³. W jawnej postaci (4) można przedstawić jako warunek funkcji produkcyjnych zależnych od stanu:

$$z_s = f_s(x_1, \dots, x_N) \quad s \in \Omega \quad (8)$$

Funkcja f_s , jako element zbioru Ω funkcji produkcji, definiuje maksymalną wielkość produkcji (output) dla stanu s w zależności od wektora czynników x (input). Powyższa relacja obowiązuje przy założeniu, że decyzje produkcyjne zostaną podjęte zanim stan okaże się prawdą oraz że zbiór czynników produkcji jest ograniczony.

Ograniczając rozważanie do dwóch możliwych stanów natury, można te związki przedstawić graficznie. Na rysunku 2 zaprezentowano obydwa stany natury – rok suchy (stan 1) oraz rok z normalnymi opadami deszczu (stan 2). Uprawiając rośliny na określonej powierzchni bez sztucznego nawadniania, osiąga się przy stanie 2 wysokie plony, natomiast podczas suszy (stan 1) plony są znacznie niższe. Przy założeniu stałej liczby czynników produkcji (ziemia, praca, środki finansowe), które dodatkowo mogą zostać zmienione przez zainstalowanie na określonej powierzchni systemu nawadniania, wielkość produkcji zapewniająca dochody w czasie suszy wzrosłaby, podczas gdy przy normalnej ilości opadów byłaby niższa, ponieważ część czynników produkcji powięza-

³ W tej formie równanie (7) opisuje technologię jednego produktu.

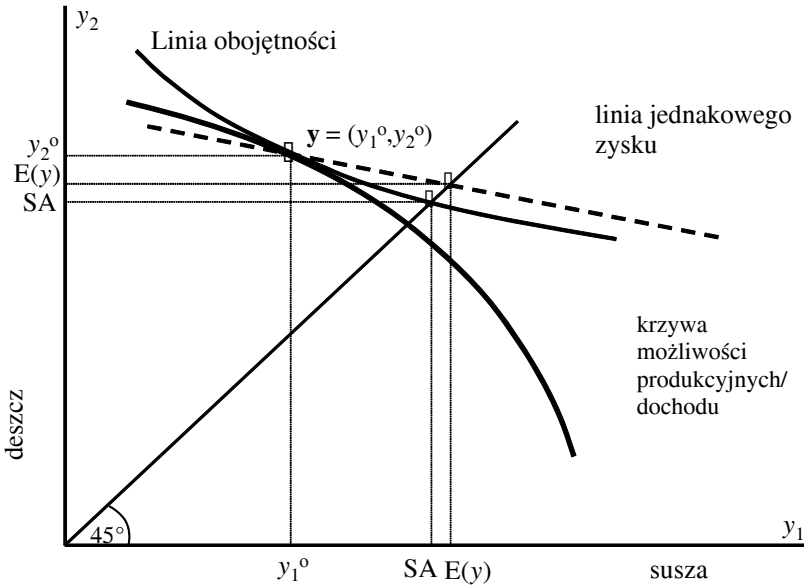
na z systemem nawadniania nie zapewniłaby dochodów⁴. Na rysunku 2 punkt $y = (y_1^0, y_2^0)$ reprezentuje sytuację ograniczonego zakresu nawadniania. W takim przypadku, podczas suszy zostanie uzyskany niski dochód (y_1^0), natomiast przy normalnych opadach – dochód wysoki (y_2^0). Wraz ze wzrostem nawodnionej powierzchni wielkość produkcji zapewniająca dochód (przy przyjętych cenach produktów) oraz zależne od stanu natury dochody dążyłyby w kierunku krzywej transformacji, co przedstawiono na rysunku 2: zwiększenie nawadniania prowadzi do uzyskania wyższych dochodów podczas suszy, natomiast w przypadku opadów deszczu, na skutek poniesionych kosztów, dochody są niższe. Koszty te można porównać do składek ubezpieczeniowych, ponieważ są one ponoszone niezależnie od wystąpienia danego stanu, dając możliwość reakcji w przypadku wystąpienia stanu niekorzystnego (susza).

Krzywa transformacji reprezentuje różne kombinacje wielkości produkcji (outputs) zależnej od stanu natury i implikuje tym samym ich substytucyjność, której uwzględnienie jest specyficznym elementem tej teorii i odróżnia ją od zazwyczaj przeprowadzanych analiz funkcji produkcji [12]. Jeśli analiza odnosi się do funkcji kosztów zamiast funkcji produkcji, to obowiązuje substytucyjność dla zależnych od stanu natury czynników produkcji.

Dla decydenta obowiązywałaby funkcja celu maksymalizująca użyteczność oczekiwaną zgodnie z równaniem (1), ilustrowana przez krzywą obojętności użyteczności na rysunku 2. Optymalna kombinacja zmiennych dochodów zależnych od stanu natury jest wtedy określona przez ich punkt styczności z krzywą możliwości dochodu $y = (y_1^0, y_2^0)$. W tym przypadku krańcowa stopa substytucji między dochodami zależnymi od stanu natury odpowiada wartości bezwzględnej nachylenia krzywej obojętności, zgodnie z równaniem (3). Na rysunku 1 określa ją punkt przecięcia krzywej obojętności użyteczności $y = (y_1^0, y_2^0)$ z prostą 45° i jest to ekwiwalent pewności (SA). Zgodnie z powyższym, nachylenie krzywej obojętności odpowiada stosunkowi prawdopodobieństwa wystąpienia stanów π_1 / π_2 , reprezentującemu nachylenie linii jednakowego zysku, na której leżą wszystkie kombinacje zależnych od stanu dochodów oznaczających tę samą wartość oczekiwaną $E(y)$. Jest ona przedstawiona na rysunku 2 przez przecięcie linii jednakowego zysku z przekątną. Różnica $E(y) - SA$ określa tym samym premię za ryzyko.

Rozważmy teraz ponownie możliwość ubezpieczenia, które za opłatą uczciwej premii w przypadku suszy (tj. w stanie z_j) umożliwi wypłatę odszkodowania. Ubezpieczenie tego rodzaju ma charakter tzw. ubezpieczenia od utraty plonu lub utraty zysku. Jest ono oferowane np. w USA lub w Hiszpanii [6, 24, 33] i obecnie jest coraz częściej przedmiotem dyskusji [6, 8, 18, 33]. Zgodnie z powyższym, zakres ubezpieczenia zostałby ustalony tak, żeby użyteczność oczekiwana była maksymalna. To oznaczałoby pełne ubezpieczenie poziomu i struktury produkcji w punkcie y^0 i zagwarantowałoby pewny dochód w wysokości wartości oczekiwanej $E(y)$ na rysunku 2.

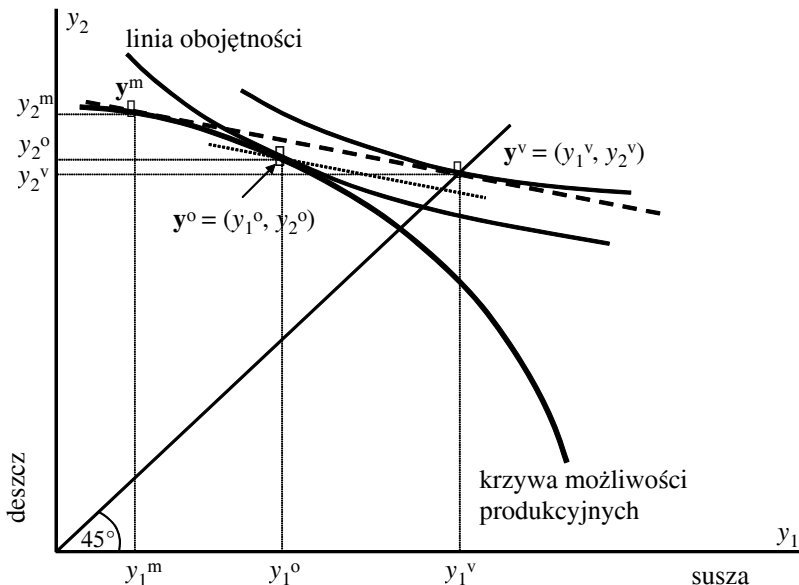
⁴ Tak byłoby w przypadku, gdyby w celu finansowania systemu nawadniania część powierzchni została sprzedana, lub przy finansowaniu zewnętrznym część produkcji została użyta do pokrycia kosztów kapitałów obcych, pomniejszając tym samym dochód.



Rys. 2. Dochód zależny od stanu i optymalny program produkcji

Użyteczność może jednak zostać jeszcze bardziej zwiększona, jeśli zostanie wybrany inny punkt na krzywej transformacji (rys. 3). Ten punkt jest zlokalizowany w miejscu, w którym nachylenie krzywej transformacji odpowiada stosunkowi prawdopodobieństwa stanów π_1 / π_2 , co następuje w punkcie y^m . Wnioskując z rysunku 3, poziom użyteczności dla tego punktu jest wyższy niż pełne ubezpieczenie dla początkowego poziomu i struktury produkcji. Punkt wybrany na krzywej możliwości dochodów jest tym, który maksymalizuje wartość oczekiwaną dochodu z rynku y^m (bez ubezpieczenia). W porównaniu do sytuacji wyjściowej, implikuje on bardziej ryzykowny program produkcji. W wybranym przykładzie oznacza to mniej nawadniana, a w związku z tym wyższe wpływy ze sprzedaży przy wystarczających opadach, oraz niskie dochody z powodu suszy, które zostaną zrekomensowane przez świadczenia ubezpieczeniowe. Ponieważ uczciwa premia odpowiada wartości oczekiwanej świadczeń z ubezpieczenia, to całkowity dochód $y^v = (y_1^v, y_2^v)$, niezależnie od pojawiających się stanów natury, jest równy wartości oczekiwanej wpływów z rynku. Odpowiada to pełnemu ubezpieczeniu, które zostałyby wybrane przy uczciwej premii przez każdego decydenta z awersją do ryzyka. Przy procentowym narzucie na uczciwą premię, który jest ogólnie stosowaną praktyką, prosta ubezpieczenia przebiegałaby bardziej stromo niż linia jednakowego zysku, co przy pozostałych warunkach równych (c.p.) prowadziłoby do częściowego ubezpieczenia i do programu produkcji z nieco mniejszym ryzykiem [5]. Na rysunku 3 byłoby to reprezentowane przez punkt na krzywej możliwości pro-

dukcyjnych, leżący pomiędzy y^0 i y^m . Przedstawiona tutaj zależność decyzji produkcyjnych oraz decyzji o użyciu instrumentów zarządzania ryzykiem (w tym przypadku ubezpieczenia) pokazuje, że obszary te muszą być zawsze analizowane jednocześnie.



Rys. 3. Optymalny program produkcji przy zawarciu ubezpieczenia

Rozszerzenie powyższych rozważań o więcej produktów i większą liczbę stanów natury pozwala na sformułowanie problemu decyzyjnego jako problemu optymalizacji przy następujących warunkach pobocznych:

$$\max_x \{U = \sum_s \pi_s u(y_s)\}$$

z

$$y_s = z_s p - k_s(x)$$

przy warunkach pobocznych:

$$T(z_s, x) \leq 0 \quad s \in \Omega$$

$$x \geq 0$$

(9)

Przy czym z_s jest wektorem określającym wielkość produkcji przy stanie s , p wektorem deterministycznie założonych cen produktów, $k_s(x)$ funkcją kosztów, która również jest zależna od stanu natury $T(z_s, x)$ i określa możliwości produkcyjne danego zbioru czynników produkcji. Wektor x reprezentuje instru-

mentalne zmienne w formie działalności, które muszą być zdefiniowane (częściowo) zależnie od stanu natury, aby prawidłowo zilustrować problem decyzyjny.

Teoria zależności od stanu i programowanie matematyczne

Problemy optymalizacji z ograniczeniami są zazwyczaj rozwiązywane metodą programowania matematycznego, które w różnych formach znalazło zastosowanie w badaniach związanych z problemami podejmowania decyzji. Wyróżnić można (deterministyczne) programowanie liniowe jako model wyjściowy, jak również jego różne modyfikacje, mające na celu uwzględnienie niepewnych oczekiwań, w tym model oparty o oczekiwaną stopę zwrotu i wariację, oraz jego linearną alternatywę: MOTAD [15], jak i maksymalizację użyteczności oczekiwanej [14, 16, 20].

Ponieważ koncepcja Chambersa i Quiggina zakłada stany dyskretne, które znajdują wyraz w dyskretnych warunkach pobocznych (patrz równanie 9), programowanie matematyczne można uznać z powodu jego specyficznych właściwości za oczywistą metodę pozwalającą na empiryczne zastosowanie teorii zależności od stanu natury. Umożliwia to wprowadzenie normatywnych zaleceń na poziomie przedsiębiorstwa, co jest od dłuższego czasu domeną modeli programowania matematycznego. W coraz większym stopniu programowanie matematyczne będzie używane – częściowo także w kombinacji z metodami ekonometrycznymi – również do analizy pozytywnej⁵. Wspomniane na wstępie badania Adamsona [1], wykorzystujące programowanie liniowe do implementacji teorii zależności od stanu, służą ostatecznie analizie pozytywnej. Z tego względu w kolejnych podrozdziałach zostaną przedstawione podstawowe koncepcje kryjące się za tymi teoriami, przy podkreśleniu związku z teorią zależności od stanu natury.

Model programowania liniowego

Punktem wyjścia dla kolejnych rozważań będzie model programowania liniowego (PL). W kontekście niepewnych oczekiwań, podejście to jest reprezentowane jako maksymalizacja oczekiwanego zysku, zgodnie z następującą formułą:

$$\max_x \{E(G) = c'x - f\}$$

przy warunkach pobocznych:

$$Ax \leq b \tag{10}$$

$$\text{i } x \geq 0$$

⁵ Jako przykłady można przytoczyć stworzone dla analizy sektora systemy modelowe CAPRI [9], DREMFA [23] lub FAMOS [32], które zawierają modele matematycznego programowania na poziomie grupy regionalnej i zakładowej.

gdzie $E(G)$ jest wartością oczekiwaną zysku, jako zmienna zależna; c jest wektorem $n \times 1$ oczekiwanych wartości nadwyżki bezpośredniej z poszczególnych działań⁶, a x reprezentuje wektor $n \times 1$ rozmiarów działalności. Koszty stałe f są dla ścisłości również ujęte, mimo iż nie mają wpływu na rozwiązanie problemu optymalizacji. Rozmiary działalności zostaną ograniczone przez wektor $m \times 1$ dostępnych zasobów b . Pierwszy warunek poboczny zapewnia, że suma wymagań działalności nie przekroczy dostępnych zasobów, podczas gdy drugi warunek przedstawia nieujemne rozmiary działalności.

Macierz A $n \times m$ zawiera współczynniki techniczne i tworzy wspólnie z parametrami funkcji celu (c) działalność, technologie w formie liniowo zdefiniowanych procesów. Uwzględnia się niepewność docelowych parametrów funkcji celu i ich zależność od możliwych (dyskretnych) stanów natury. Zachodzi wówczas związek:

$$c = \pi' C \tag{11}$$

gdzie π jest wektorem $s \times 1$ prawdopodobieństwa stanu, a C reprezentuje macierz typu $s \times n$ wartości docelowych każdej działalności (kolumn), w zależności od odpowiedniego stanu (wiersze). Wartości docelowe c można tym samym zinterpretować jako wartości oczekiwane [15]. Stochastyczny charakter efektów produkcyjnych jest uwzględniony, jednakowoż bez szczególnego uwzględnienia jego zależności od stanu natury. Ponadto funkcja celu zakłada neutralne zachowanie decydenta wobec ryzyka.

Nieliniowa optymalizacja według modelu Markovitza

Najbardziej znanym rozszerzeniem wyżej przedstawionego modelu programowania liniowego, w celu zrozumienia awersyjnych zachowań w stosunku do ryzyka, jest zaproponowany przez Markovitza model oparty o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję (EV). Maksymalizuje on ekwiwalent pewności (SA), zgodnie z aproksymacją według Pratta [30]:

$$SA \approx E(G) \frac{1}{2} - R[E(G)]Var(G), \quad z \quad R[G] = \frac{-U''(G)}{U'(G)} \tag{12}$$

przy czym $E(\cdot)$ i $Var(\cdot)$ określają wartość oczekiwaną i operator wariancji, podczas gdy $R[\cdot]$ reprezentuje bezwzględną funkcję awersji do ryzyka. Przy założeniu stałej bezwzględnej awersji do ryzyka, tzn. funkcji wykładniczej jako funkcji użyteczności ryzyka, otrzymamy ekwiwalent pewności jako:

$$SA = E(G) - \frac{\lambda}{2} Var(G) \tag{13}$$

gdzie λ reprezentuje stopień bezwzględnej awersji do ryzyka [6]. Ten problem optymalizacyjny można sformułować w następujący sposób:

⁶ Nadwyżka bezpośrednia stanowi różnicę między przychodem z danej działalności a kosztami bezpośrednimi.

$$\max_x \left\{ SA = E(G) - \frac{\lambda}{2} \text{Var}(G) \right\}$$

z

$$SA = E(c)'x - f - \frac{\lambda}{2} x'Vx \quad (14)$$

przy warunkach pobocznych:

$$Ax \leq b$$

$$i \ x \geq 0$$

przy czym $E(c)$ jest wektorem $n \times 1$ oczekiwanych wartości docelowych i V reprezentuje macierz kowariancji $n \times n$. Powyższe formuły przedstawiają nieliniowy problem optymalizacyjny. Poprzez powtarzanie rozwiązania dla wariacji parametru awersji do ryzyka λ , można stworzyć efektywne ograniczenie.

Opis technologii w modelach PL i EV jest w znacznym stopniu podobny. Wynika to z faktu, iż macierz kowariancji V jest związana z macierzą C zależnych od stanu wartości docelowych poprzez kolejny związek [14]:

$$V = F' \Pi F, \quad \text{gdzie } F = C - Ic' \quad (15)$$

przy czym F jest macierzą odchyłeń wartości docelowych zależnych od stanu $s \times n$ od ich odpowiednich wartości oczekiwanych, a $\mathbf{1}$ jest zdefiniowane jako wektor jedynek $s \times 1$. Macierz Π $s \times s$ zawiera prawdopodobieństwa stanu na głównej przekątnej, a oprócz tego zera. Podobnie jak w teorii PL, również w tym przypadku nie występuje wyraźne uwzględnienie zależności od stanu.

Bezpośrednia maksymalizacja użyteczności oczekiwanej

Rozszerzając ograniczenia modelu o liczbę dyskretnych stanów natury, można za pomocą nieliniowej optymalizacji bezpośrednio zmaksymalizować wartość oczekiwaną użyteczności ryzyka, jak zostało to przedstawione przez Lamberta i McCarla [21]:

$$\max_x \{E(U) = \pi' U(g)\}$$

przy warunkach pobocznych:

$$Ax \leq b \quad (16)$$

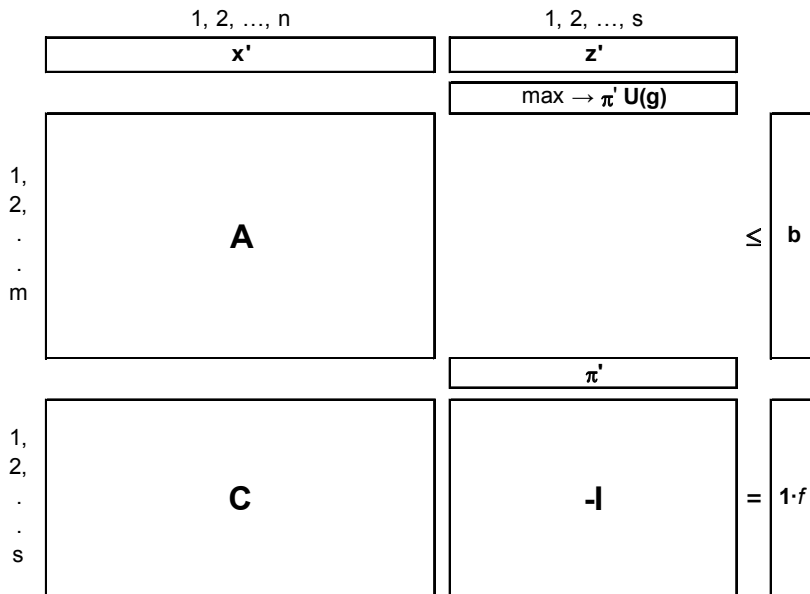
$$Cx - Ig = 1f$$

$$i \ x \geq 0$$

przy czym $U(\cdot)$ reprezentuje funkcję użyteczności ryzyka, g jest wektorem $s \times 1$ zysków różnych stanów, a π oznacza wektor $s \times 1$ prawdopodobieństwa stanu. C jest macierzą $s \times n$ zależnych od warunków wartości nadwyżek bezpośrednich i I macierzą jednostkową typu $s \times s$.

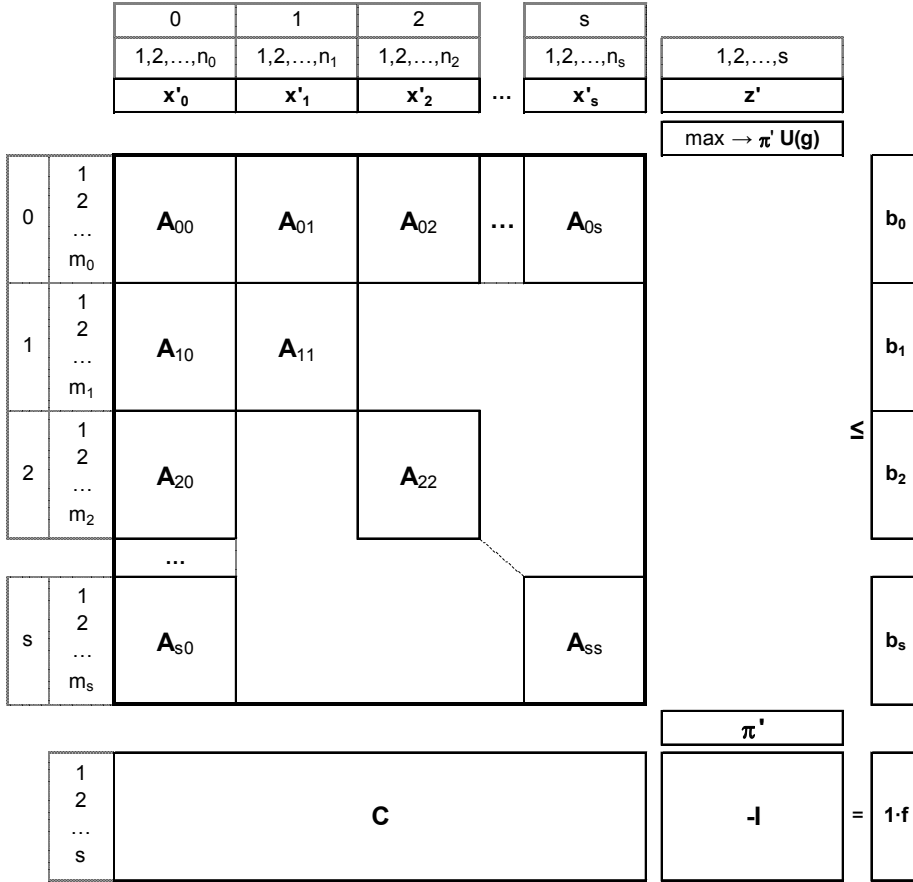
Technologia produkcji jest zdefiniowana w tak sformułowanym modelu przez działalności z odpowiednimi współczynnikami w macierzach A i C . Ponieważ uwzględnione są różne stany natury, model pozwala na zdefiniowanie zależnych od stanu technologii, co jednak wymaga odpowiedniej definicji poszczególnych działalności i ograniczeń.

Schemat optymalizacji na rysunku 4 obrazuje związki opisane powyżej. Pierwsza kolumna zawiera wektor poziomą działań x , jak i macierze A i C . Druga kolumna reprezentuje obliczenie dochodu zależnego od stanu z ze związku $Cx - gI = If$.



Rys. 4. Schemat optymalizacji w modelu użyteczności oczekiwanej

Rysunek 5 przedstawia technologię zależną od stanu natury. Macierz A składa się z podmacierzy A_{ij} . Podwektor x_0 reprezentuje przy tym niezależne od stanu natury działania, a b_0 oznacza niezależne od stanu ograniczenia. Podwektory x_j ($j = 1, 2, \dots, s$) zawierają te działania, które zostały sformułowane zależnie od stanu. Są one połączone poprzez podmacierze A_{0j} ($j = 1, 2, \dots, s$) z niezależnymi od stanu ograniczeniami i poprzez przekątne A_{jj} ($j = 1, 2, \dots, s$) z zależnymi od stanu ograniczeniami. Również niezależne od stanu działania x_0 mogą wykazywać związki do zależnych od stanu ograniczeń b_j ($i = 1, 2, \dots, s$), które zawarte są w podmacierzach A_{j0} ($j = 1, 2, \dots, s$).



Rys. 5. Schemat optymalizacji z uwzględnieniem zależności od stanu natury

Problem optymalizacji przy uwzględnieniu zależności od stanu można przedstawić jako:

$$\max_x \{E(U) = \pi'U(g)\}$$

przy warunkach pobocznych:

$$\sum_{j=0}^k A_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s \tag{17}$$

$$Cx - Ig = 1f$$

$$i \ x \geq 0$$

Technologia produkcji jest teraz zdefiniowana przez działalności z odpowiednimi współczynnikami w macierzach A_{ij} oraz macierzy C , przy uwzględnieniu odpowiednich warunków pobocznych, jak w formule możliwości produkcji $T(z, x)$ (9).

Przykład zastosowania teorii zależności od stanu natury

Na zaprezentowanym w kolejnych podrozdziałach przykładzie zostaną objaśnione właściwości omówionej teorii. W tym celu zostanie wykorzystany uproszczony model zakładu rolnego produkującego pszenicę ozimą, jęczmień, ziemniaki oraz cebulę. Ziemniaki i cebula mogą być w razie potrzeby nawadniane, przy czym ta możliwość jest ograniczona⁷. W celu objaśnienia różnic pomiędzy teoriami, model zostanie sformułowany na podstawie tych samych danych, lecz w różny sposób: najpierw jako model programowania liniowego na podstawie wartości oczekiwanej, następnie jako model oparty o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję i ostatecznie jako teoria użyteczności oczekiwanej dla zależnych od stanu natury działań oraz przy braku ich uwzględnienia.

Dane wyjściowe i model podstawowy

Stany natury zostaną odzwierciedlone stosownie do ilości opadów podczas okresu wegetacyjnego. Z powodów uproszczenia będą rozróżnione tylko cztery stany natury, reprezentujące rok mokry (S_1), rok ze średnimi opadami (S_2), rok suchy (S_3) oraz rok suszy (S_4). W tabeli 1 zostały przedstawione plony pól rolnych dla jednostkowych stanów natury. W ostatniej kolumnie dla ziemniaków i cebuli zostały uwzględnione podane ilości wody dla wariantów nawadniania. Za pomocą prawdopodobieństw stanów (π_i) można obliczyć wartości oczekiwane w ostatnim wierszu tabeli.

Tabela 1

Plony zależne od stanów natury i ilości nawadniania

Stany natury	Prawdopodobieństwo π_i	Pszenica	Jęczmień	Ziemniaki	Ziemniaki	Cebula	Cebula	Wielkość nawadniania
				bez nawadniania	z nawadnianiem	bez nawadniania	z nawadnianiem	
				plony dt/ha				mm
S_1 mokry rok	0,20	78,2	79,2	650,0	650,0	427,5	427,5	0
S_2 średni rok	0,50	92,0	88,0	520,0	585,0	451,3	475,0	90
S_3 suchy rok	0,20	73,6	74,8	195,0	552,5	190,0	427,5	250
S_4 susza	0,10	36,8	44,0	130,0	520,0	95,0	380,0	350
Wartości oczekiwane		80,0	79,2	442,0	585,0	358,6	446,5	130

Na podstawie cen i kosztów zmiennych przedstawionych w tabeli 2 zostały obliczone zależne od stanu natury nadwyżki bezpośrednie z poszczególnych działalności produkcyjnych oraz ich wartości oczekiwane i odchylenia standardowe. Dla wariantów nawadniania zostały obliczone w ostatniej kolumnie ta-

⁷ Dane w przykładzie są oparte na udokumentowanych założeniach. Źródłem informacji dla tych obliczeń są dokumenty Izby Rolniczej NRW (Niemcy) uzupełnione przez oszacowania eksperckie.

beli 2 zależne od stanu zmienne koszty nawadniania. Wynoszą one 2 €/mm nawadniania. Nadwyżki bezpośrednie wskazują, że ziemniaki i cebula szczególnie wrażliwie reagują na niższe opady. Standardowe odchylenie dla ich progów rentowności można obniżyć poprzez zastosowanie nawadniania.

Tabela 2

Nadwyżki bezpośrednie zależne od stanu natury

Stany natury	Prawdo- podo- bień- stwo <i>pi</i>	Psze- nica	Jęcz- mień	Ziem- niaki bez nawad- niania	Ziem- niaki z nawad- nianiem	Cebula bez nawad- niania	Cebula z nawad- nianiem	Zmienne
								koszty nawad- niania ^a
								Nadwyżki bezpośrednie €/ha
								€/ha
S ₁ mokry rok	0,20	488,40	471,20	2725,00	2725,00	2488,75	2488,75	0,00
S ₂ średni rok	0,50	654,00	568,00	1880,00	2122,50	2738,13	2807,50	180,00
S ₃ suchy rok	0,20	433,20	422,80	-232,50	1591,25	-5,00	1988,75	500,00
S ₄ susza	0,10	-8,40	84,00	-655,00	1180,00	-1002,50	1290,00	700,00
Wartości oczekiwane		510,48	471,20	1373,00	2042,50	1765,56	2428,25	260,00
Odchylenie standardowe		196,25	141,94	1192,02	459,87	1403,83	490,76	218,17
Koszty €/dt		12,00	11,00	6,50	6,50	10,50	10,50	
Zmienne koszty €/ha ^b		450,00	400,00	1500,00	1500,00	2000,00	2000,00	

^a 2 €/mm nawadniania; ^b Bez kosztów nawadniania.

W tabeli 3 przedstawiono standardowe podejście programowania liniowego w oparciu o wartość oczekiwaną. Założono przy tym, że gospodarstwo posiada 240 ha powierzchni gruntów ornych i zasoby pracy wynoszące 6000 robotnikogodzin (rbh). Dalsze ograniczenia dotyczą wielkości upraw ziemniaków i cebuli (jedna trzecia powierzchni uprawnej dla każdej z tych upraw) oraz upraw jęczmienia (dwie trzecie powierzchni). Pszenica może zajmować maksymalnie połowę powierzchni uprawnej. Systemy nawadniania zapewnią odpowiednie inwestycje. Koszty raty rocznej zostały skalkulowane na 350 €/ha.

Optymalnym rozwiązaniem (tab. 4) tego modelu jest struktura zasiewów, w której ziemniaki i cebula są uprawiane w maksymalnym rozmiarze, określonym przez wymogi płodozmianowe. Pozostała powierzchnia zostanie obsiana pszenicą. Cała powierzchnia uprawy ziemniaków (79,2 ha) zostanie nawodniona. Cebula będzie uprawiana na powierzchni 14,1 ha. Łączny obszar nawodnień wyniesie 93,3 ha. Powierzchnia gruntów ornych (przy uwzględnieniu ograniczeń płodozmianowych) i zasoby pracy zostały w pełni wykorzystane. Cena dualna gruntów ornych wynosi 356 €/ha, co oznacza, że zwiększenie powierzchni tych gruntów o 1 ha spowoduje wzrost nadwyżki bezpośredniej z całego gospodarstwa o 356 euro. Natomiast cena dualna pracy wynosi 39 €/rbh. Oczekiwana całkowita wartość nadwyżki bezpośredniej wynikająca z tego rozwiązania równa się 320 000 euro. Przy wzięciu pod uwagę parametrów zależnych od sta-

nu natury (tab. 2), można również obliczyć odchylenie standardowe nadwyżki bezpośredniej z całego gospodarstwa. Wynosi ono 143 291 euro, co odpowiada ok. 45% współczynnika wariancji.

Tabela 3

Model programowania liniowego na podstawie wartości oczekiwanej dla przykładowego zakładu

Wyszczególnienie	Zaopatrzenie nawadniania (ha)	Pszenica (ha)	Jęczmień (ha)	Ziemniaki bez nawadniania (ha)	Ziemniaki z nawadnianiem (ha)	Cebula bez nawadniania (ha)	Cebula z nawadnianiem (ha)	Warunek wiersza	Wektor pojemności (b)
Nadwyżka bezpośrednia (max)	-350,00	510,48	471,20	1373,00	2042,50	1765,56	2428,25		
Bilans gruntów ornych (ha)		1	1	1	1	1	1	≤	240
Bilans pracy (rbh/rok)		11	10	25	33	30	38	≤	6000
Pszenica max 50 %		0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	≤	0
Jęczmień max 67 %		-0,67	0,33	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	≤	0
Ziemniaki max 33 %		-0,33	-0,33	0,67	0,67	-0,33	-0,33	≤	0
Cebula max 33 %		-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	0,67	0,67	≤	0
Obszar nawadniania (ha)	-1				1		1	≤	0

Tabela 4

Optymalne rozwiązanie modelu wyjściowego

Działania	J.m.	Powierzchnia	Ceny dualne
Powierzchnia nawodnień	ha	93,3	-
Pszenica	ha	81,6	-
Jęczmień	ha	-	0,19
Ziemniaki bez nawadniania	ha	-	6,81
Ziemniaki z nawadnianiem	ha	79,2	-
Cebula bez nawadniania	ha	65,1	-
Cebula z nawadnianiem	ha	14,1	-
Ograniczenia		Niewykorzystane zasoby	Ceny dualne
Powierzchnia uprawna	ha	-	355,95
Siła robocza	rbh/rok	-	39,09
Pszenica max 50 %	ha	38,4	-
Jęczmień max 67 %	ha	160,8	-
Ziemniaki max 33 %	ha	-	322,13
Cebula max 33 %	ha	-	512,45
Powierzchnia nawadniana	ha	-	350,00
Nadwyżka bezpośrednia z całego gospodarstwa	euro/rok ^a	319.943	(143.291)

^a Odchylenie standardowe w nawiasach.

Model oparty o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję

Standardowy model programowania liniowego nie uwzględnia istoty niepewności i może zostać zastosowany przez decydentów o postawie neutralnej wobec ryzyka. Dla wyjaśnienia zachowań awersyjnych do ryzyka można zastosować metodę opartą o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję, dlatego w tym celu powyższy model zostanie rozszerzony o macierz kowariancji docelowych nadwyżek bezpośrednich. Można ją określić na podstawie zależnych od stanu nadwyżek bezpośrednich podanych w tabeli 2, przy wykorzystaniu równania (15). Macierz tę przedstawiono w tabeli 5.

Z funkcji celu maksymalizującej całkowitą wartość nadwyżki bezpośredniej w modelu deterministycznym zostanie teraz zmaksymalizowany ekwiwalent pewności całkowitej nadwyżki bezpośredniej, zgodnie z aproksymacją Pratta, oraz przy uwzględnieniu stałej bezwzględnej awersji do ryzyka, zgodnie z równaniem (13). W tym przypadku można ograniczyć rozważanie do nadwyżki bezpośredniej, ponieważ koszty stałe, jak i niezależne od produkcji transfery – o ile zostaną przyjęte za deterministyczne – nie wpływają na wariancję miary ryzyka i mają tylko nieznaczny wpływ na ekwiwalent pewności. Tym samym można stwierdzić brak wpływu na optimum ze strony tych wielkości⁸.

Tabela 5

Macierz wariancji i kowariancji nadwyżek bezpośrednich

Wyszczególnienie	Pszenica	Jęczmień	Ziemniaki bez nawad- niania	Ziemniaki z nawad- nianiem	Cebula bez nawad- niania	Cebula z nawad- nianiem
Pszenica	38.515	27.785	160.455	54.455	237.593	92.802
Jęczmień	27.785	20.146	118.604	41.636	171.390	66.683
Ziemniaki bez nawadniania	160.455	118.604	1.420.910	524.639	1.571.985	484.460
Ziemniaki z na- wadnianiem	54.455	41.636	524.639	211.477	536.156	161.267
Cebula bez nawadniania	237.593	171.390	1.571.985	536.156	1.970.734	663.880
Cebula z na- wadnianiem	92.802	66.683	484.460	161.267	663.880	240.841

⁸ Byłoby inaczej, gdyby zamiast stałej absolutnej awersji do ryzyka przyjęto stałą względną (i spadającą) awersję do ryzyka, ponieważ w tym przypadku wartość oczekiwana funkcji celu pozostaje w multiplikatywnym związku do wariancji [6].

Maksymalizacja użyteczności oczekiwanej

Aby zastosować model użyteczności oczekiwanej zgodnie z równaniem (16) i rysunkiem 4, należy określić funkcję użyteczności $U(z)$. Analogicznie jak w modelu opartym o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję przedstawioną w podrozdziale „Nieliniowa optymalizacja wg modelu Markowicza”, zakłada się stałą bezwzględną awersję do ryzyka, co implikuje funkcję użyteczności w formie:

$$U(z) = 1 - e^{-\lambda z}$$

gdzie λ reprezentuje stopień bezwzględnej awersji do ryzyka. Użyteczność oczekiwaną oblicza się wtedy jako:

$$E(U) = \sum_{s=1}^S \pi_s \left(1 - e^{-\lambda z_s} \right)$$

przy czym z_s przedstawia całkowite nadwyżki bezpośrednie w dyskretnych stanach $s = 1, 2, \dots, S$. Macierz A odpowiada macierzy w metodzie użyteczności oczekiwanej deterministycznego modelu PL (tab. 3), przy braku uwzględnienia technologii zależnej od stanu natury, a macierz C zawiera zależne od warunków nadwyżki bezpośrednie z tabeli 2.

W celu zdefiniowania technologii zależnej od stanu natury macierz A zostanie podzielona zgodnie z rysunkiem 5 na podmacierze pojedynczych stanów. Stany S_1 do S_4 reprezentują przy tym różne sytuacje opadów deszczu, możliwe do zaobserwowania podczas okresu wegetacji. Na ich podstawie ustala się wielkości nawadniania, co jest uwzględnione w zależnych od stanu natury procesów nawadniania. Dla przykładowego gospodarstwa uwzględnia się przy tym, że nawadnianie następuje tylko w przypadku stanów S_2 do S_4 , przy czym zostaną aplikowane zależnie od stanu różne ilości wody. Całkowita nawadniana powierzchnia nie można tutaj przekroczyć udostępnionej dzięki inwestycjom powierzchni nawadniania. Również ograniczenia pracy dla każdego stanu natury muszą być dotrzymane.

Z tych rozważań wynikają przedstawione w tabeli 6: macierz współczynników A oraz macierz C zależnych od stanu nadwyżek bezpośrednich. Działania zależne od stanu określają wpływ nawadniania, także odpowiednie współczynniki w macierzy C przedstawiają zmiany nadwyżek bezpośrednich spowodowane poprzez nawadnianie.

Tabela 6
Zastosowanie teorii zależności od stanu natury w maksymalizacji użyteczności oczekiwanej w przykładowym gospodarstwie

Wyszczególnienie	Macierz A										Wektor wiersza Warunek	Wektor pojemności (b)
	Zaparczenie nawadniania (ha)	Pszensica (ha)	Jęczmień (ha)	Ziemniaki bez nawadniania (ha)	Cebula bez nawadniania (ha)	S ₂ - nawadnianie ziemniaki (ha)	S ₂ - nawadnianie cebula (ha)	S ₃ - nawadnianie ziemniaki (ha)	S ₃ - nawadnianie cebula (ha)	S ₂ - nawadnianie ziemniaki (ha)		
Powierzchnia gruntów ornych (ha)		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	240
Bilans prac (rbh/rok)		11	10	25	30							6000
Pszensica max 50 %		0,5	-0,5	-0,5	-0,5							0
Jęczmień max 67 %		-0,67	0,33	-0,67	-0,67							0
Ziemniaki max 33 %		-0,33	-0,33	0,67	-0,33							0
Cebula max 33 %		-0,33	-0,33	-0,33	0,67							0
S ₂ - praca (rbh/rok)		11	10	25	30	8	8					6000
S ₂ - powierzchnia nawadniana (ha)	-1					1	1					0
S ₂ - ziemniaki (ha)				-1		1						0
S ₂ - cebula (ha)					-1					1		0
S ₃ - praca (rbh/rok)		11	10	25	30			8	8			6000
S ₃ - powierzchnia nawadniana (ha)	-1							1	1			0
S ₃ - ziemniaki (ha)				-1				1				0
S ₃ - cebula (ha)					-1				1			0

cd. tab. 6

Wyszczególnienie	Zaopatrzenie nawadniania (ha)	Pszensica (ha)	Jęczmień (ha)	Ziemniaki bez nawadniania (ha)	Cebula bez nawadniania (ha)	S ₂ - nawadnianie ziemniaki (ha)	S ₂ - nawadnianie cebula (ha)	S ₃ - nawadnianie ziemniaki (ha)	S ₃ - nawadnianie cebula (ha)	S ₄ - nawadnianie ziemniaki (ha)	S ₄ - nawadnianie cebula (ha)	Warunek	Wektor pojemności (b)
S ₄ -praca (rbh./rok)		11	10	25	30					8	8	IV	6000
S ₄ - powierzchnia nawadniana (ha)	-1									1	1	IV	0
S ₄ -ziemiaki (ha)				-1						1		IV	0
S ₄ -cebula (ha)					-1						1	IV	0

Macierz C

S ₁ - nadwyżka bezpośrednia (€/ha)	-350,00	488,40	471,20	2725,00	2488,75								
S ₂ - nadwyżka bezpośrednia (€/ha)	-350,00	654,00	568,00	1880,00	2738,13	242,50	69,38						
S ₃ - nadwyżka bezpośrednia (€/ha)	-350,00	433,20	422,80	-232,50	-5,00	1823,75	1993,75						
S ₄ - nadwyżka bezpośrednia (€/ha)	-350,00	-8,40	84,00	655,00	-1002,50			1835,00	2292,50				

Porównanie wyników optymalizacji

Rozwiązanie problemów optymalizacji przeprowadzono za pomocą programu Microsoft Excel przy użyciu dodatkowego programu SOLVER. Przedstawione poniżej porównanie wyników optymalizacji pomoże w wyjaśnieniu różnic pomiędzy modelami.

W tabeli 7 podano wyniki rozwiązań modeli bez i z zależnym od stanu natury zdefiniowaniem technologii w modelu użyteczności oczekiwanej. Wyniki modelu opartego o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję odpowiadają w znacznym stopniu modelowi użyteczności oczekiwanej bez zależnego od stanu natury sformułowania technologii, dlatego zrezygnowano z jej oddzielnego wyjaśnienia. Tylko w przypadku ekstremalnej awersji do ryzyka istnieją niewielkie różnice, które wynikają z błędu aproksymacji ekwiwalentu pewności w modelu, opartego o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję⁹.

W przypadku neutralnej postawy wobec ryzyka, wyniki teorii użyteczności oczekiwanej bez zdefiniowania technologii w zależności od stanu natury odpowiadają deterministycznemu modelowi PL (tab. 4). Wyniki przedstawione w dolnej części tabeli 7 uwzględniają zależność od stanu natury i różnią się wariantami nawadniania w zależności od odpowiedniego stanu: dla lat ze średnią ilością opadów (S_2) będzie nawadniane 79,2 ha ziemniaków i 14,1 ha cebuli, co odpowiada rozwiązaniu niezależnemu od stanu. Natomiast w latach suchych (S_3) i podczas suszy (S_4) zostanie poddane nawadnianiu 79,2 ha całkowitej powierzchni uprawnej cebuli, podczas gdy ziemniaki tylko na obszarze 14,1 ha. Oddana do dyspozycji i wykorzystana w latach z deficytem opadów wielkość nawadniana wynosi w obydwu modelach 93,3 ha. Uwzględnienie decyzji zależnych od stanu natury w drugim modelu prowadzi do około 5000 € wyższego oczekiwanego dochodu. Ponieważ równocześnie odchylenie standardowe nadwyżek bezpośrednich jest prawie o 9000 euro niższe, ta strategia jest dominującą stochastyczną pierwszego rzędu i byłaby preferowana przez wszystkich decydentów.

W przypadku awersji do ryzyka będzie preferowana uprawa jęczmienia zamiast pszenicy, ze względu na jego mniejszą wrażliwość na suszę. W miarę wzrostu awersji do ryzyka, uprawa roślin okopowych – jako bardziej ryzykowna – będzie redukowana na rzecz zbóż. Równocześnie będzie zwiększać się obszar nawadniania, aż pokryje w końcu całą powierzchnię uprawną ziemniaków i cebuli. W tym punkcie zbieżne są wyniki modelu zależnego i niezależnego od stanu natury, ponieważ aby zmniejszyć zmienność uzyskiwanych plonów we wszystkich możliwych sytuacjach deficytu wody, będzie nawadniana cała powierzchnia. W pozostałych przypadkach różnią się one do tego stopnia, że w modelu zależnym od stanu natury dodatkowy obszar nawadniania zostanie wykorzystany w S_2 dla ziemniaków, natomiast w S_3 i S_4 dla cebuli. Większa elastyczność znajdzie wyraz w wyższych wartościach oczekiwanych i niższych odchyleniach standardowych całkowitego prognozy rentowności.

⁹ Obliczenie ekwiwalentu pewności zgodnie z (12) jest aproksymacją, o ile wyniki nie są w rozkładzie normalnym; w modelu podporządkowane plony i nadwyżki bezpośrednie nie mają rozkładu normalnego przede wszystkim przy wariantach nawadniania.

W praktyce istnieje możliwość zadecydowania o rozmiarze nawadniania, zgodnie z zaobserwowanym deficytem wody – tzn. zależnie od stanu natury. Jeśli ta możliwość nie zostanie uwzględniona w planach, ekonomiczny potencjał nawadniania nie zostanie wzięty pod uwagę. Teoria zależności od stanu natury umożliwia zatem bardziej realistyczne przedstawienie sytuacji decyzyjnej. To stwierdzenie jest obowiązujące dla wszystkich sytuacji decyzyjnych, w których istnieje możliwość reakcji na pojawienie się niepewnych wydarzeń. Znaczące jest przy tym, że uwzględnienie możliwości reakcji ma również wpływ na decyzje, które muszą zostać podjęte przed pojawieniem się niepewnego wydarzenia. W powyższym przykładzie dotyczy to decyzji inwestycyjnych dotyczących zwiększenia nawadnianego obszaru.

Tabela 7

Nastawienie do ryzyka		Neutralne do ryzyka	Awersja do ryzyka ^a		
			λ_1	λ_2	λ_3
Technologia zdefiniowana niezależnie od stanu					
Pszonica	ha	81,6	-	-	-
Jęczmień	ha	-	81,6	100,7	97,3
Ziemniaki ogółem	ha	79,2	79,2	60,1	79,2
w tym: bez nawadniania	ha	-	-	-	-
z nawadnianiem	ha	79,2	79,2	60,1	79,2
Cebula ogółem	ha	79,2	79,2	79,2	63,5
w tym: bez nawadniania	ha	65,1	54,9	-	-
z nawadnianiem	ha	14,1	24,3	79,2	63,5
Powierzchnia nawadniana	ha	93,3	103,5	139,3	142,7
Wartość oczekiwana marży	€/rok	319.943	319.927	313.772	311.886
Odchylenie standardowe marży	€/rok	143.291	130.136	74.712	74.679
Model zależności od stanu natury					
Pszonica	ha	81,6	-	-	-
Jęczmień	ha	-	81,6	90,4	97,3
Ziemniaki ogółem	ha	79,2	79,2	70,4	79,2
w tym: nawadniane w S_2	ha	79,2	79,2	70,4	79,2
nawadniane w S_3	ha	14,1	24,3	40,8	79,2
nawadniane w S_4	ha	14,1	24,3	40,8	79,2
Cebula ogółem	ha	79,2	79,2	79,2	63,5
w tym: nawadniana w S_2	ha	14,1	24,3	49,6	63,5
nawadniana w S_3	ha	79,2	79,2	79,2	63,5
nawadniana w S_4	ha	79,2	79,2	79,2	63,5
Powierzchnia nawadniana	ha	93,3	103,5	120,0	142,7
Wartość oczekiwana p. r.	€/rok	325.134	324.305	319.449	311.886
Odchylenie standardowe p. r.	€/rok	134.412	122.645	100.234	74.679

^a $\lambda_1 = 1 \times 10^{-7}$, $\lambda_2 = 2 \times 10^{-6}$, $\lambda_3 = 3 \times 10^{-5}$.

Podsumowanie

Zalety teorii zależności od stanu natury można rozpatrywać w kontekście analizy teoretycznej, z powodu jej dużych możliwości wsparcia procesów wnioskowania. Z uwagi na jej złożoność, zastosowanie w badaniach empirycznych jest dużym wyzwaniem. Dlatego dotychczasowe zastosowania empiryczne są rzadkością. Niniejszy artykuł pokazuje możliwość zastosowania modeli matematycznego programowania do przedstawienia niepewności w formie zależnej od stanu natury. Przy odpowiednim sformułowaniu, teoria ta pozwala na bardziej realistyczne zobrazowanie indywidualnych procesów decyzyjnych we wszystkich przypadkach, w których istnieje możliwość elastycznej reakcji na pojawienie się nieprzewidywalnych stanów natury. W przypadku produkcji roślinnej dotyczy to również – oprócz nawadniania – decyzji zastosowania środków ochronnych lub nawozów. W produkcji zwierzęcej należy tu wymienić przede wszystkim kwestie reprodukcji, zarządzania zdrowiem i żywieniem. W teorię mogą również zostać włączone specyficzne instrumenty zarządzania ryzykiem, jak np. ubezpieczenia, derywaty pogodowe lub ograniczenie wahań cen przy pomocy kontraktów terminowych. Zaletą tej metody jest również możliwość uwzględnienia wewnętrznych współzależności pomiędzy zależnymi i niezależnymi od stanu natury działalnościami. Także w analizie pozytywnej zrozumienie wpływu niepewności w regionalnych lub sektorowych modelach zyskuje coraz bardziej na znaczeniu. O ile znajdują tutaj zastosowanie metody analizy działalności przedsiębiorstwa, teoria zależności od stanu natury otwiera również nowe możliwości takiej analizy, co obrazują np. badania Adamsona [1]. Został tam zastosowany model gospodarstwa z uwzględnieniem warunków regionalnych, w którym główny nacisk położony został na zilustrowanie korzystania z wody w systemie wodnym Murray-Darling, w jednym z najbardziej urodzajnych regionów Australii. W oparciu o dziewiętnaście modeli regionalnych utworzono zależny od stanu natury model dostępności wody na całym obszarze. Determinują ją opady roczne, co przedstawiono w modelu za pomocą trzech stanów, odpowiednio reprezentujących normalny, suchy i mokry rok. Działania zależne od stanu natury określają zasady produkcji dla różnego zapotrzebowania w wodę, co wpływa na zmiany na obszarach uprawnych bardzo wymagających wody plantacji (głównie bawełna). Za pomocą tej teorii można przeanalizować skutki różnych działań politycznych dotyczących regulacji korzystania z wody, dochody oraz regionalną dystrybucję wody, jak również związane z tym zasolenie gleby, z uwzględnieniem kwestii ryzykownego zachowania rolników.

W obliczu rosnącego obciążenia dochodów ryzykiem wynikającym z liberalizacji rynku, zmian klimatycznych, jak i z uwagi na spodziewany spadek znaczenia dopłat bezpośrednich jako składników dochodów wolnych od ryzyka, na forum UE dyskutowane są obecnie opcje polityczne mające na celu wsparcie zarządzania ryzykiem. Analiza takich działań z wykorzystaniem podejścia modelowego wymaga uwzględnienia zarówno niepewności, jak i ryzykownego zachowania decydentów. Modele oparte o teorię zależności od stanu stwarzają możliwość rozszerzenia dotychczasowego, analitycznego instrumentarium.

Punktem krytycznym w tworzeniu modelu jest krok ustalenia stanów dyskretnych. Z jednej strony liczba stanów natury musi być ograniczona, aby uniknąć problemów dotyczących rozmiaru, z drugiej strony zmienność warunków produkcji powinna być wystarczająco reprezentowana. Konieczny jest zatem akceptowalny kompromis. Sposobem rozwiązania tego problemu może być następująca procedura: po pierwsze, należy przeprowadzić gruntowną analizę danych, aby uzyskać informację na temat podstawowych procesów stochastycznych. Na ich podstawie poprzez stochastyczną symulację można wygenerować próbki możliwych stanów natury, pozwalające na zastosowanie matematycznego modelu optymalizacji. Obliczenia modelowe z różnymi próbkami stanów mogą dostarczyć informacji o ich wrażliwości, co powinno stanowić wystarczającą podstawę do ostatecznego ustalenia ilości stanów natury koniecznych do uwzględnienia w zadanym modelu.

Literatura:

1. Adamson T., Mallawaarachchi T., Quiggin J.: Water use and salinity in the Murray–Darling Basin: A state-contingent model. *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics* 51, 2007.
2. Anderson J.R., Dillon J.L., Hardaker J.B.: *Agricultural decision analysis*. Iowa State University Press, Ames 1977.
3. Arrow K., Debreu G.: Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22, 1954.
4. Bamberg G., Coenenberg A.G.: *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*. 13. Auflage. Vahlen, München 2006.
5. Berg E., Krämer J.: Chapter 7 – Policy options for risk management [in:] Meuwissen M.P.M., van Asseldonk M.A.P.M. und Huirne R.B.M. (eds.): *Income stabilisation in European agriculture: design and economic impact of risk management tools*. Wageningen Academic Publishers, Wageningen 2008.
6. Berg E.: Das System der Ernte- und Einkommensversicherungen in den USA – ein Modell für Europa? *Berichte über Landwirtschaft* 80(1), 2002.
7. Berg E.: Risk response of farmers to changes in the European agricultural policy [in:] Huirne R.B.M., Hardaker J.B. und Dijkhuizen A.A. (eds.): *Risk management strategies in agriculture. State of the Art and Future Perspectives*. Mansholt Studies 7. Mansholt Institute, Wageningen 1997.
8. Breustedt G.: *Effiziente Reduktion des Produktionsrisikos im Ackerbau durch Ertragsversicherungen*. Diss. Universität Kiel, 2004.
9. Britz W.: Automated model linkages: the example of CAPRI. *Agrarwirtschaft* 57, 2008.
10. Chambers R.G., Quiggin J.: Technological and financial approaches to risk management in agriculture: an integrated approach. *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics* 48(2), 2004.
11. Chambers R.G., Quiggin J.: The State-Contingent Properties of stochastic production functions. *American Journal of Agricultural Economics* 84(2), 2002.
12. Chambers R.G., Quiggin J.: *Uncertainty, production, choice and agency: The State-Contingent Approach*. Cambridge University Press, New York 2000.

13. Hanf C.-H.: Entscheidungslehre – Einführung in Informationsbeschaffung, Planung und Entscheidung unter Unsicherheit. 2. Auflage. Oldenbourg, München-Wien 1991.
14. Hardaker J.B., Huirne R.B.M., Anderson J.R., Lien G.: Coping with risk in agriculture. 2nd edition. CABI Publishing, Wallingford, UK 2004.
15. Hardaker J.B., Pandey S., Patten L.H.: Farm planning under uncertainty: a review of alternative programming models. *Review of Marketing and Agricultural Economics* 59(1), 1991.
16. Hazell P.B.R.: A linear alternative to quadratic and semi-variance programming for farm planning under uncertainty. *American Journal of Agricultural Economics* 53(1), 1971.
17. Hazell P.B.R., Norton R.D.: Mathematical programming for economic analysis in agriculture. MacMillan Publishing Co., New York 1986.
18. Hirschauer N., Mußhoff O.: Risikomanagementinstrumente im Vergleich: Sollte man landwirtschaftliche Ernteversicherungen subventionieren? Gute alte Argumente in einem neuen Streit [in:] Berg E., Hartmann M., Heckeley T., Holm-Müller K. und Schiefer G. (Hrsg.): *Risiken in der Agrar- und Ernährungswirtschaft und ihre Bewältigung. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaues e.V., Bd. 44.* Landwirtschaftsverlag, Münster-Hiltrup 2009.
19. Hirshleifer J., Riley J.G.: The analytics of uncertainty and information. *Cambridge Surveys of Economic Literature.* Cambridge University Press, Cambridge 1992.
20. Hirshleifer J.: Investment decision under uncertainty: choice-theoretic approaches. *Quarterly Journal of Economics* 79(4), 1965.
21. Lambert D.K., McCarl B.A.: Risk modeling using direct solution of nonlinear approximations of the utility function. *American Journal of Agricultural Economics* 67, 1985.
22. Laux H.: Entscheidungstheorie. 7. Auflage. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 2007.
23. Lehtonen H., Bärlund I., Tattari S., Hilden M.: Combining dynamic economic analysis and environmental impact modelling: Addressing uncertainty and complexity of agricultural development. *Environmental Modelling & Software* 22, 2007.
24. Meuwissen M.P.M., Huirne R.B.M., Skees J.R.: Income insurance in European agriculture. *Eurochoices* 1, 2003.
25. O'Donnell C., Griffiths W.E.: Estimating state-contingent production frontiers. *American Journal of Agricultural Economics* 88, 2006.
26. O'Donnell C., Chambers R.G., Quiggin J.: Efficiency analysis in the presence of uncertainty. *Journal of Productivity Analysis* 33(1), 2010.
27. Pratt J.: Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica* 32, 1964.
28. Quiggin J., Chambers R.G.: Drought policy: a graphical analysis. *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics* 48(2), 2004.
29. Rasmussen S., Karantininis K.: Estimating state-contingent production functions. Paper prepared for presentation at the XIth Congress of the European Association of Agricultural Economists (EAAE), Copenhagen 2005. Food & Resource Economics Institute, The Royal Veterinary & Agricultural University of Copenhagen (KVL); online at AgEcon Search, <http://ageconsearch.umn.edu/>
30. Rasmussen S.: Criteria for optimal production under uncertainty. The state-contingent approach. *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics* 47(4), 2003.
31. Robison L.J., Barry P.J.: The competitive firm's response to risk. Macmillan, New York–London 1987.

32. Schmid E., Stürmer B., Sinabell F.: Modellanalysen von Optionen einer künftigen GAP in Österreich. Forschungsendbericht des Instituts für nachhaltige Wirtschaftsentwicklung, Universität für Bodenkultur Wien (BOKU) und des Österreichischen Instituts für Wirtschaftsforschung (WIFO), Wien 2008.
33. Weber R., Kraus T., Mußhoff O., Odening M., Rust I.: Risikomanagement mit indexbasierten Wetterversicherungen – Bedarfsgerechte Ausgestaltung und Zahlungsbereitschaft [in:] Landwirtschaftliche Rentenbank (Hrsg.): Risikomanagement in der Landwirtschaft. Schriftenreihe Bd. 23, Frankfurt/Main 2008.

ERNST BERG
University in Bonn

OPTIMIZATION OF PRODUCTION IN DEPENDING ON THE STATE OF NATURE IN CONDITIONS OF THE UNCERTAINTY

Summary

The strong dependence on exogenously determined states of nature (weather, diseases, pests, etc.) is a constituent element of most agricultural production processes. While this state contingency creates uncertainties, it likewise offers various possibilities to react to particular states of nature (e.g. through irrigation or pest management). A concept which in principle accounts for these contexts is the so called *state contingent approach* originally developed by Chambers and Quiggin. This approach comprises the state contingent depiction of the production process under uncertainty as basis for a realistic representation of individual decision making as well as the resulting market reactions.

The following article deals with the state contingent approach in the context of mathematical programming. It starts with the description of the conceptual foundations of the approach and subsequently focuses on its implementation in the context of mathematical programming under uncertainty. The comparison with conventional mathematical programming approaches using an example documents the conceptual advantage of the state contingent approach, but also clarifies the methodical challenges which result from its complexity.